UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Contextualizando las matemáticas a través de su historia usando un juego de mesa

Autor/es

ÁNGEL PALACIOS POLO

Director/es

MIGUEL MARAÑÓN GRANDES

Facultad

Escuela de Máster y Doctorado de la Universidad de La Rioja

Titulación

Máster Universitario de Profesorado, especialidad Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2018-19

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

Trabajo de Fin de Máster

Contextualizando las matemáticas a través de su historia usando un juego de mesa

Autor

Ángel Palacios Polo

Tutor: Miguel Marañón Grandes

MÁSTER:
Máster en Profesorado, Matemáticas (M06A)

Escuela de Máster y Doctorado

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

AÑO ACADÉMICO: 2018/2019

RESUMEN

La falta de interés en las clases de Matemáticas es un problema frecuente en la Educación Secundaria. Los estudiantes no suelen tener la motivación necesaria en la asignatura, lo que constituye una de las principales causas de su rendimiento escolar. Por otro lado, las explicaciones están focalizadas en los aspectos técnicos de la disciplina, olvidándose su contexto histórico.

Esta situación es el origen de este proyecto, que combina la metodología basada en el juego con la Historia de las Matemáticas con el objetivo de aumentar la motivación de los estudiantes y proporcionar una formación matemática más contextualizada, interdisciplinar y, en definitiva, más completa.

Concretamente, el presente trabajo contiene un juego educativo matemático de tablero que permite a los estudiantes de 2º de ESO aprender aspectos históricos de las matemáticas mientras resuelven problemas basados en el currículo de la asignatura.

Palabras clave: Metodología basada en el juego, Historia de las Matemáticas, Contextualización matemática, Motivación.

ABSTRACT

Lack of interest in the Mathematics classroom is a common problem in the Secondary Education. Students do not usually have the necessary motivation in the subject, which is one of the main reasons for their school performance. Besides, the explanations are focused on the technical aspects of the discipline, so that its historical context is forgotten.

This situation is the origin of this project, which combines the game-based methodology and the History of Mathematics with the objective of increasing students’ motivation and providing a more contextualized, interdisciplinary and, ultimately, more complete mathematical training.

Specifically, the present paper contains an educational mathematical board game that enables students from 2º ESO to learn historical aspects of mathematics as they solve problems based on the syllabus of the subject.

Keywords: Game-based methodology, History of Mathematics, Contextualized Mathematics, Motivation.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

La Matemática es una disciplina científica que se caracteriza por la abstracción, la lógica y el razonamiento hipotético deductivo, además de emplear terminologías y notaciones alejadas de la vida cotidiana. Estos rasgos, entre otros, dificultan la enseñanza y aprendizaje de la asignatura de Matemáticas que tradicionalmente ha sido una de las asignaturas menos populares entre los estudiantes, como se desprende del Informe Cockcroft 'Las Matemáticas sí cuentan' elaborado a comienzos de los años 80 (Cockcroft, 1985). Más reciente es el Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (Informe PISA) desarrollado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) que arroja resultados negativos respecto al rendimiento académico del alumnado en Matemáticas, siendo particularmente preocupantes en España (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2013). Estos informes son dos ejemplos que muestran la necesidad de introducir cambios en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas apostando por la innovación.

El presente Trabajo Fin de Máster (TFM) se ajusta a la modalidad *propuesta de innovación educativa* cuyo objetivo final es el de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Matemáticas mediante la utilización en el aula de dos recursos de forma combinada, a saber:

- La Historia de las Matemáticas.
- El Aprendizaje Basado en Juegos.

La propuesta innovadora consiste en un juego educativo matemático relacionado con la Historia de las Matemáticas. En el juego, los estudiantes resuelven ejercicios del currículo de Matemáticas a la vez que van conociendo aspectos destacados de la Historia de las Matemáticas.

La elección de este tema está motivada, aparte de por mis gustos personales, por mi experiencia personal en el periodo de prácticas del Máster de Profesorado. Durante dos meses en un centro de Educación Secundaria he tenido la oportunidad de observar algunas facetas de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas que en mi opinión tienen posibilidades de mejora, llamándome especialmente la atención:

- El aislamiento y la descontextualización de las matemáticas.
- El desconocimiento generalizado de la Historia de las Matemáticas.
- La falta de motivación e interés por la asignatura de Matemáticas.

Mi interés por incluir en este trabajo la Historia de las Matemáticas surgió a partir de una clase de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) cuando se estaba explicando el teorema de Tales. Los estudiantes se interesaron por saber si se trataba del mismo Tales que habían estudiado en la asignatura de Filosofía y por el personaje histórico más que por su conocido resultado matemático. Pienso que puede ser interesante integrar la Historia de las Matemáticas en las clases, por un lado, para conseguir una formación académica más compacta e interdisciplinar, evitando el aislamiento de las Matemáticas de las demás asignaturas, y por otro lado, porque puede ser de ayuda como elemento motivador en el aula. La propuesta de este TFM trabaja la Historia de las Matemáticas bajo la forma de un juego, lo que creo que, además de permitir a los estudiantes aprender aspectos de la historia de la disciplina, le proporciona un carácter más ameno y más motivador.

Aunque me habría gustado poner en práctica este proyecto, no se ha podido llevar al aula debido a que su elaboración ha sido posterior a la conclusión de mi periodo de prácticas en el centro.

En cuanto a la estructura del trabajo, en primer lugar se exponen los objetivos generales y específicos que se persiguen con la propuesta innovadora. A continuación, se recogen los fundamentos teóricos en los que se basa la propuesta y el estado actual de la cuestión tratada. Después se desarrolla con detalle la propuesta de innovación educativa: aplicación práctica en el aula, objetivos, contenidos curriculares, materiales, recursos y evaluación. Por último, se incluye una discusión sobre la viabilidad de la propuesta, sus ventajas e inconvenientes y los posibles beneficios que se pueden alcanzar, junto con las conclusiones finales, además de las referencias, la bibliografía consultada y los anexos que complementan el trabajo.

2. OBJETIVOS

Las posibilidades de mejora detectadas y expuestas en la sección anterior son el origen de este TFM y determinan sus objetivos, que están centrados en satisfacer dichas necesidades.

El objetivo principal de este TFM es:

- Mejorar la contextualización histórica de la asignatura de Matemáticas y fomentar el trabajo en equipo a través del juego con el fin de aumentar la motivación del alumnado.

Además, con este trabajo se pretende alcanzar los siguientes objetivos:

- Integrar la Historia de las Matemáticas en el aula en base al currículo.
- Incorporar a la clase de Matemáticas la metodología basada en el juego.
- Combinar la Historia de las Matemáticas y el juego en una actividad educativa para poner en práctica en el aula.
- Relacionar la asignatura de Matemáticas con otras asignaturas de la Educación Secundaria.
- Humanizar la asignatura de Matemáticas.
- Apreciar las matemáticas desarrolladas por culturas, civilizaciones y personajes de diferentes épocas de la historia y reconocer su utilidad.

3. MARCO TEÓRICO

La propuesta de innovación educativa recogida en este trabajo se sostiene sobre dos pilares fundamentales: la Historia de las Matemáticas y el Aprendizaje Basado en Juegos. En esta sección se desarrollan con detalle los fundamentos teóricos que justifican el empleo de estos dos recursos en el aula.

3.1. Historia de las Matemáticas

Numerosos expertos en diferentes áreas de estudio como pedagogos, historiadores, profesores y matemáticos han señalado la importancia que tiene la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico en las clases de Matemáticas en la Educación Secundaria. El eminente matemático Henri Poincaré afirmaba: *si queremos prever el futuro de la matemática, el camino adecuado para conseguirlo es el de estudiar la historia y el estado actual de esta ciencia* (Kline, 1992). El también matemático Eric Temple Bell subrayó: *ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas* (González, 2004). Por último, el matemático Pedro Puig Adam recomendaba *no olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución* (González, 2004).

No se trata de impartir Historia de las Matemáticas en las aulas de Secundaria, sino que lo que estos autores y otros muchos defienden es su uso como recurso didáctico para brindar a los estudiantes un aprendizaje más completo o, como diría el psicólogo David Ausubel, un aprendizaje significativo. No se trata de enseñar Historia de las Matemáticas, sino de enseñar Matemáticas históricamente (Maza, 1994). Son diversas las razones que apoyan y justifican el empleo de la Historia de las Matemáticas en las aulas, pero muchos autores coinciden en destacar las cuatro siguientes: *contextualización*, *motivación*, *interdisciplinaridad* y *humanización*.

<u>Contextualización</u>

La Historia de las Matemáticas nos permite conocer el origen y la evolución de los conceptos y procedimientos matemáticos estudiados en el aula proporcionando un contexto que sirve de soporte para la asignatura (Gutiérrez, 2010). Las Matemáticas son resultado de la concepción de la vida, de las necesidades de la sociedad y de la época… en definitiva, tienen un contexto socio-cultural que ofrece una visión más amplia y rica culturalmente de la asignatura. A través de la Historia de las Matemáticas, los estudiantes pueden ver la parte aplicada de las Matemáticas, su conexión con la realidad y entender por qué se desarrollaron ciertos resultados matemáticos en un determinado momento de la historia.

Motivación

La Psicología nos muestra que el aprendizaje del alumnado y su rendimiento escolar está influenciado por distintas variables personales cognitivas y afectivas. Una clasificación somera de estas variables es la siguiente:

- *Querer*. La motivación del estudiante.
- *Saber*. Los conocimientos previos del estudiante.
- *Creer*. Las expectativas y el autoconcepto del estudiante.
- *Poder*. La inteligencia, la atención y la memoria del estudiante.
- *Ser*. Los rasgos de personalidad del estudiante.
- *Hacer*. Las estrategias y técnicas de aprendizaje del estudiante.

La motivación se puede definir como la palanca que mueve toda conducta y es una de las principales causas del rendimiento escolar iniciando, orientando y manteniendo o deteniendo el comportamiento del estudiante (Fonseca, 2018). En conclusión, sin motivación ni interés no se produce el verdadero aprendizaje. En este sentido, la Historia de las Matemáticas está repleta de anécdotas, aventuras, paradojas, desencuentros, errores… que pueden despertar la curiosidad y el interés de los estudiantes por la asignatura.

La siguiente cita es del antiguo Secretario de Educación de los Estados Unidos, Terrel Bell, que resalta la importancia de la motivación: *hay tres cosas que recordar sobre la educación en el aula: la primera es la motivación, la segunda es la motivación y la tercera es la motivación* (Fonseca, 2018).

Interdisciplinaridad

La Historia de las Matemáticas ofrece una manera de relacionar las matemáticas con el saber general que llamamos Cultura (Gutiérrez, 2010). En concreto, permite enlazar las Matemáticas con otras asignaturas del currículo como la Historia, la Geografía, la Filosofía, la Física o el Arte, ofreciendo al alumnado una visión más integrada de las Matemáticas. Por ejemplo, muchos resultados matemáticos surgen al intentar resolver problemas de la Física o tienen repercusiones en la Arquitectura y en la producción de obras artísticas.

Humanización

Las Matemáticas suelen percibirse como algo frío, intangible y alejado de la vida real. Conocer a los personajes que las desarrollaron humaniza la disciplina, la acerca a los estudiantes y le aporta colorido a la asignatura, además de ser fuente de modelos humanos para el alumnado. En este sentido, las biografías son un buen recurso. El matemático y docente Miguel de Guzmán afirmaba: *la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática* (Gutiérrez, 2010) y (Lupiáñez, 2002).

Además de estas cuatro razones, la Historia de las Matemáticas muestra los valores del trabajo matemático y científico presentando la investigación científica como una posibilidad profesional en el futuro de los estudiantes.

Desde el punto de vista del profesorado, la Historia de las Matemáticas también es beneficiosa para detectar y anticipar dificultades que pueden tener los estudiantes con las Matemáticas. En la historia se han producido dificultades en la comprensión y aceptación de nuevas teorías matemáticas. Si grandes matemáticos y matemáticas tuvieron dificultades para comprender ciertos aspectos de la disciplina, entonces parece lógico deducir que nuestros estudiantes también se van a encontrar con esas mismas dificultades en la actualidad. Esta idea está íntimamente relacionada con lo que se conoce como *método genético*, que se trata de una forma de incorporar la Historia de las Matemáticas al aula de manera que el estudiante deba repetir y recorrer a grandes rasgos el proceso histórico que se desarrolló hasta la formulación actual de un determinado concepto o procedimiento matemático (Gutiérrez, 2010).

Por último, el estudio de la Historia de las Matemáticas puede plantearse básicamente de dos formas: *historia interna* o *historia externa* (Español, 2016).

- *Historia interna*. Considera fundamentales las ideas y teorías de las Matemáticas describiendo su evolución temporal, pero prestando poca atención a los personajes y a los contextos de su desarrollo.
- *Historia externa*. Considera fundamental la parte social de las Matemáticas estudiando su tiempo en relación con los personajes y los contextos de su desarrollo.

Las biografías constituyen una buena forma de presentar la Historia de las Matemáticas al alumnado porque combinan aspectos internos y externos, puesto que atienden a la vida y a la obra de los personajes.

3.2. Aprendizaje Basado en Juegos

3.2.1. *Juegos, Aprendizaje Basado en Juegos y Gamificación*

La Real Academia Española define el juego como *ejercicio recreativo o de competición sometido a reglas, y en el cual se gana o se pierde*. Esta definición, aunque es superficial, ofrece una primera idea del significado del término *juego* de la que se desprenden tres características fundamentales: tiene carácter lúdico, reglas propias y espíritu competitivo.

Un tratamiento más profundo fue realizado por el historiador y sociólogo Johan Huizinga en su obra *Homo Ludens (1938)*, en la que estudió el juego desde un punto de vista antropológico analizando las implicaciones sociales y culturales del juego y su importancia en el desarrollo de la civilización. Huizinga concibe el juego como fenómeno cultural y su pensamiento puede resumirse, según sus propias palabras, en la idea de que *la cultura humana brota del juego y en él se desarrolla* (Huizinga, 1972). De hecho, afirma que el juego es más antiguo que la propia cultura y lo define como *acción o actividad voluntaria, realizada en ciertos límites fijos de tiempo y lugar, según una regla* *libremente consentida, pero absolutamente imperiosa, provista de un fin sí, acompañada de una sensación de tensión y de júbilo, y de la conciencia de ser de otro modo que en la vida real*. De esta forma, Huizinga proporciona una definición más completa de *juego* en la que, además de considerarlo lúdico, reglado y competitivo, tiene las siguientes características: libre, limitado temporalmente y espacialmente, improductivo, generador de tensión y aislado de la vida real.

Dos décadas después, el sociólogo Roger Caillois, en su ensayo *Teoría de los Juegos* (Caillois, 1958), continuó y amplió el estudio sobre juegos llevado a cabo por Huizinga destacando la ausencia, entre otros, de los juegos de azar. La definición de juego ofrecida por Caillois era esencialmente la misma que la proporcionada por Huizinga, considerando el juego como una actividad libre, separada, improductiva, reglamentada y ficticia, pero incorporando la característica de ser incierta, introduciendo así la idea de azar en la definición.

Los trabajos sobre el juego de los sociólogos Huizinga y Caillois, junto con los de otros filósofos y psicólogos de mediados y finales del siglo XIX, constituyen los primeros estudios formales sobre el juego. Con el paso del tiempo, el juego ha adquirido mayor importancia en diferentes ámbitos de estudio como la Psicología o la Didáctica, existiendo actualmente en la literatura especializada debate sobre las distintas definiciones de *juego*, que en mayor o menor medida se basan en las anteriores. En mi opinión, una de las definiciones más completas, que se toma como referencia en este trabajo, se encuentra en (Gairín, 1990), donde se define el juego como una actividad con las siguientes características:

- Un juego es de dedicación libre.
- Un juego es un desafío contra una tarea o contra un oponente.
- Un juego está controlado por un conjunto de reglas.
- Un juego está delimitado en el tiempo y el espacio de la vida real.
- Un juego es socialmente considerado de mínima importancia.
- Un juego alcanza un estado que no es conocido al principio.
- Un juego termina después de un número finito de movimientos.

La utilización de juegos en las aulas conduce a dos nociones similares: el Aprendizaje Basado en Juegos y la Gamificación. El Aprendizaje Basado en Juegos consiste en rediseñar las actividades de una tarea de aula, utilizando conflictos artificiales reglados (es decir, juegos) para hacerlas más interesantes y atractivas buscando un equilibrio entre la necesidad de cubrir el contenido del tema y el deseo de priorizar el juego (Plass, Homer y Kinzer, 2015). Por otro lado, la Gamificación consiste en utilizar elementos propios de los juegos, como por ejemplo la competitividad, las recompensas o el azar, para motivar a los estudiantes en una actividad que no les resulta atractiva, pero no implica la utilización directa de un juego, sino características suyas.

3.2.2. *Psicología del juego*

Los estudios de Huizinga y Caillois asientan las bases para definir el juego y nos proporcionan una visión cultural de los mismos en relación con la tradición y las costumbres de la sociedad. Por otra parte, desde la perspectiva de la Psicología, las teorías sobre el juego nos ayudan a entender su relación con los procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula. En este sentido, los trabajos de algunos psicólogos son esenciales porque muestran el papel que desempeñan los juegos en el desarrollo humano y, en particular, en la educación. Si bien es cierto que estos estudios psicológicos sobre el juego se centran especialmente en la etapa de la infancia, los considero relevantes por su vinculación con el aprendizaje. En este apartado, hacemos un breve recorrido cronológico por algunas de las principales teorías sobre el juego desde el punto de vista de la Psicología tomando como referencia (Mateo 2014).

Teoría del ejercicio preparatorio de Karl Groos

Los trabajos de Karl Groos sugieren que los juegos son ejercicios mediante los cuales los niños y los jóvenes se preparan para las actividades de la vida adulta ejercitando capacidades físicas, mentales y sociales que permiten su desarrollo. Los juegos como el que se propone en este TFM requieren de capacidades como la atención, la memoria, la concentración, la comunicación o la cooperación; habilidades que los estudiantes necesitarán en su futuro.

Teoría del desarrollo cognitivo de Jean Piaget

La teoría sobre el juego del psicólogo Jean Piaget está en concordancia con su modelo constructivista del aprendizaje en el que distingue cuatro etapas que con el paso del tiempo originan un pensamiento cada vez más sofisticado.

- *Etapa sensoriomotriz*. Abarca desde el nacimiento hasta los 2 años y consiste en coordinar la información sensorial con las respuestas motoras. Durante esta etapa tiene lugar el *juego de ejercicio*, que está relacionado con los sentidos, la percepción y la acción.
- *Etapa pre-operacional*. Se desarrolla entre los 2 y los 7 años y en ella se desarrolla el *pensamiento simbólico*. Durante esta etapa surge el *juego simbólico*, que consiste en simular situaciones, objetos y personajes reales o ficticios.
- *Etapa operacional concreta*. Abarca de los 7 a los 11 años y en ella tienen lugar operaciones mentales aplicadas a eventos concretos y particulares. Durante esta etapa empieza a desarrollarse el *juego de reglas*, es decir, el juego que requiere de conocer y aceptar unas normas para conseguir el objetivo.
- *Etapa operacional formal*. Comienza a partir de los 11 años y continúa en la adultez. En ella se desarrollan operaciones mentales aplicadas a ideas abstractas, apareciendo el pensamiento lógico. Durante esta etapa se mantiene el *juego de reglas*.

En su teoría, Piaget postula que los juegos permiten asimilar la realidad sin tener que aceptar sus limitaciones. Además, afirma que con la edad se abandona el juego individual dando paso al juego colectivo y por tanto, a la competitividad. También destaca la importancia que tiene el respeto de las reglas del juego como factor de la formación moral del niño (Caillois, 1958).

Esta teoría muestra que la Educación Secundaria es un momento adecuado para incorporar a la enseñanza juegos de reglas como el elaborado en este trabajo. Esto es así porque el desarrollo cerebral de los estudiantes se encuentra en el período de las operaciones formales, que hace posible la aparición del pensamiento abstracto, lo que permite al estudiante examinar y entender situaciones hipotéticas del juego (Martín y Navarro, 2011).

Teoría sociocultural de Lev Vygotsky

La teoría del psicólogo Lev Vygotsky considera que el desarrollo humano y, por tanto, el aprendizaje se producen a través de la interacción con el medio social y cultural del entorno. El juego es para él una actividad que fomenta la socialización y permite el desarrollo de las funciones superiores como la atención o la memoria, además de generar una zona intermedia entre la realidad objetiva y la realidad imaginaria. Vygotsky formuló un modelo de enseñanza-aprendizaje formado por tres zonas: la *zona de desarrollo real*, la *zona de desarrollo potencial* y la *zona de desarrollo próximo* (*figura 3.1*).

- *Zona de desarrollo real*. Está formada por lo que ya se sabe y se es capaz de hacer por uno mismo sin ayuda.
- *Zona de desarrollo potencial*. Está formada por lo que no se sabe y no se es capaz de hacer por uno mismo, pero que con la ayuda de otra persona se puede llegar a aprender.
- *Zona de desarrollo próximo*. Es una zona intermedia entre las dos anteriores que representa la distancia entre ellas, es decir, la distancia entre lo que ya se sabe y lo que se puede aprender.

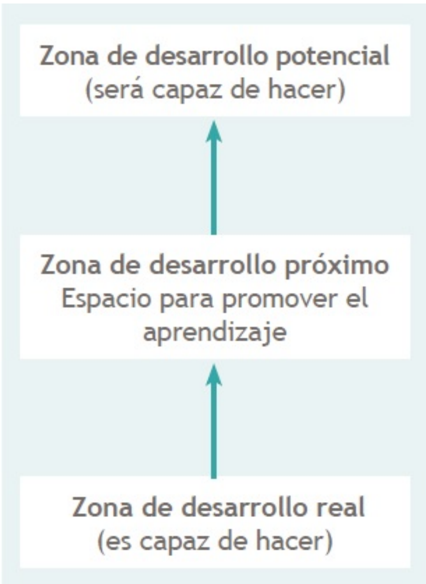


Figura 3.1. Modelo de enseñanza-aprendizaje de Vygotsky. (Fuente: (Mateo, 2014)).

Para Vygotsky, en la zona de desarrollo próximo es donde se construye el conocimiento dando lugar al desarrollo humano y al aprendizaje, siendo los juegos actividades que contribuyen a ampliar dicha zona de desarrollo próximo.

En este TFM se plantea un juego en el que los estudiantes trabajan de forma cooperativa por parejas. Esto está directamente relacionado con la teoría de Vygotsky, ya que si un estudiante no es capaz de resolver los problemas que plantea el juego, quizá su pareja sí sea capaz, pudiendo aprender de ella.

Teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner

El psicólogo Howard Gardner formuló la existencia de múltiples inteligencias más allá de las clásicas lingüística y lógico-matemática. Se trata de una teoría compuesta por ocho inteligencias independientes que actúan de manera conjunta. Estas inteligencias son: lingüística, lógico-matemática, espacial, musical, corporal-kinestésica, interpersonal, intrapersonal y naturalista. La mayoría de las personas tienen estas inteligencias, pero con un nivel de desarrollo distinto y único (Martín y Navarro, 2011).

- *Lingüística*. Capacidad para el uso del lenguaje oral y escrito: leer, escribir, debatir, explicar, enseñar, hablar, persuadir, idiomas…
- *Lógico-matemática*. Capacidad para trabajar con números, lógica, abstracciones, razonamiento deductivo e inductivo, cálculos…
- *Espacial*. Capacidad para visualizar y manipular mentalmente objetos: memoria visual, orientación, interpretación de mapas…
- *Musical*. Capacidad para percibir sonidos y ritmos: tener buen oído, cantar, tocar instrumentos, componer música…
- *Corporal-kinestésica*. Capacidad para la actividad física: deporte, baile, coordinación, equilibrio, manipulación física y táctil de objetos…
- *Interpersonal*. Capacidad para interactuar con los demás: empatía, sentimientos ajenos, extroversión, trabajo en grupo, cooperación…
- *Intrapersonal*. Capacidad para conocerse a uno mismo: fortalezas y debilidades, emociones, autonomía, reflexión, consciencia…
- *Naturalista*. Capacidad para sensibilizarse con plantas, animales y elementos del entorno natural y con el medio ambiente.

Algunos autores como (Armstrong, 2009) o (Dehesa, 2018) señalan que la puesta en práctica de un juego implica el uso de varias de estas inteligencias, como por ejemplo la corporal-kinestésica en un juego deportivo. En el juego creado en este trabajo se emplean la inteligencia lógico-matemática y la espacial, ya que se trata de un juego de tablero con contenidos matemáticos y con cierta estrategia, en el que los jugadores deben visualizar mentalmente y analizar las posibilidades de movimientos de las piezas. También se usan las inteligencias lingüística e interpersonal porque es un juego colectivo cooperativo que requiere de interacción y comunicación entre los jugadores.

3.2.3. *Juegos educativos matemáticos y su clasificación*

En este trabajo nos interesan los juegos que están relacionados con la educación y, en particular, con la asignatura de Matemáticas. A los juegos que tienen objetivos didácticos los denominaremos *juegos educativos*. A los juegos que tienen propósitos propios de la educación matemática los llamaremos *juegos educativos matemáticos*. De ahora en adelante, llamaremos simplemente juegos a los juegos educativos matemáticos.

La cantidad de juegos que vienen a nuestra mente si reflexionamos por un momento es enorme. Por tanto, sería conveniente contar con una clasificación de los juegos que permita su organización. Se pueden hacer distintas clasificaciones según el criterio empleado, pero una bastante adecuada para este trabajo es la que distingue entre *juegos de conocimiento*, *juegos de estrategia* y *juegos de azar* (Chamoso, Durán, García, Martín y Rodríguez, 2004).

- *Juegos de conocimiento*. Son aquellos que en su desarrollo emplean contenidos del currículo de Matemáticas expuestos en el aula. Su objetivo es alcanzar, afianzar o repasar contenidos matemáticos de una forma más atractiva. Se distinguen tres niveles de aplicación (Gairín 1990): pre-instruccional (para iniciar el proceso de enseñanza-aprendizaje), co-instruccional (para acompañar el proceso de enseñanza-aprendizaje) y post-instruccional (para finalizar el proceso de enseñanza-aprendizaje como repaso, refuerzo y consolidación).

- *Juegos de estrategia*. Son aquellos en los que se debe elegir una de las diferentes posibilidades existentes. La combinación de dichas elecciones constituye la estrategia para ganar o no perder. Requieren de poner en práctica habilidades, razonamientos o destrezas relacionadas con el modo de proceder de las matemáticas.
- *Juegos de azar*. Son aquellos que se caracterizan por tener un desarrollo completamente aleatorio, pudiendo ser estudiados mediante la Probabilidad y la Estadística.

Estas tres categorías originan de manera inmediata una cuarta clase de juegos denominada *juegos mixtos*, que está formada por juegos en los que intervienen características de varias de las categorías anteriores.

3.2.4. *Relación entre los juegos y las matemáticas*

Históricamente, los matemáticos se han mostrado notablemente interesados en los juegos. En la Antigua Grecia, el matemático Arquímedes diseñó un rompecabezas denominado Stomachion relacionado con la Combinatoria (*figura 3.2*). Se trata de un puzle con forma de cuadrado troceado en 14 piezas que consiste en encontrar de cuántas maneras distintas se pueden ensamblar las piezas para armar el cuadrado (Hans, Muñoz y Fernández-Aliseda, 2005). En el año 1715, el matemático Gottfried Leibniz escribió una carta en la que afirmaba: *nunca los hombres son más ingeniosos que en la invención de los juegos* (Gairín, 1990). Alrededor de 1880, el matemático Édouard Lucas inventó el conocido rompecabezas llamado Torres de Hanói que consiste en un número de discos perforados de diferente radio que se apilan insertándolos en uno de tres postes fijados a un tablero, como muestra la *figura 3.2*, y cuyo objetivo es trasladar la pila de discos a otro de los postes siguiendo ciertas reglas (Hernández, 2012).

Figura 3.2. Stomachion (izquierda) (Fuente: (Hans, Muñoz y Fernández-Aliseda, 2005)). Torres de Hanói (derecha). (Fuente: (Hernández, 2012)).

No es difícil encontrar razones que justifiquen este interés de los matemáticos en los juegos. Si se reflexiona acerca de la relación entre los juegos y las matemáticas, se observan ciertos paralelismos tanto en su ejercicio como en su finalidad educativa. En cuanto a la finalidad educativa, juegos y matemáticas pretenden desarrollar capacidades mentales como el pensamiento lógico o el razonamiento. Respecto al ejercicio, (Gairín, 1990) presenta un estudio de las semejanzas estableciendo una correspondencia esquemática entre el desarrollo de los juegos y el de las Matemáticas (*tabla 3.1*).

Juegos	Matemáticas
Reglas del juego	Reglas de construcciones, lógicas, instrucciones y operaciones
Situaciones iniciales	Axiomas y definiciones
Jugadas	Construcciones y deducciones
Figuras del juego	Medios, expresiones y términos
Estrategia del juego	Utilizar las reglas y reducir ejercicios conocidos a fórmulas
Situaciones resultantes	Nuevos teoremas y nuevos conocimientos

Tabla 3.1. Correspondencia entre juegos y matemáticas. (Fuente: (Gairín, 1990)).

El matemático y docente Miguel de Guzmán también señaló las anteriores semejanzas entre los juegos y las matemáticas en la conferencia que desarrolló en Leeds durante el Congreso sobre Popularización de las Matemáticas en el año 1989, basada en (De Guzmán, 1989). Cualquier juego comienza con un conjunto de reglas que definen la función de sus piezas, de la misma forma que una teoría matemática empieza con axiomas y definiciones de elementos. Al inicio del juego, se produce una familiarización con sus reglas relacionando las piezas del juego, exactamente igual que al empezar a relacionar los primeros elementos de una teoría matemática. Cuando se avanza en el dominio del juego, se adquieren técnicas sencillas que, en condiciones especiales, ofrecen buen resultado; estas serían los lemas, proposiciones y resultados básicos de las matemáticas. El estudio profundo del juego permite conocer jugadas más complicadas alejadas de lo básico, como sucede con los grandes teoremas y resultados matemáticos. Más adelante, se avanza en el juego tratando de resolver de manera original situaciones inéditas, lo que se corresponde con la investigación matemática. Por último, unas pocas personas son capaces de crear juegos nuevos e innovadores, del mismo modo que se crean nuevas teorías matemáticas.

Fases de los juegos: el modelo de Pólya

Los pasos que seguimos cuando practicamos un juego, especialmente si es de estrategia, son similares a los que hacemos al resolver problemas matemáticos (Chamoso et al, 2004). Esta similitud permite que los procesos mentales asociados al juego sean de utilidad en las clases de Matemáticas. A continuación, se expone esta semejanza basándonos en el *modelo de las cuatro fases de Pólya*.

El matemático George Pólya desarrolló una teoría heurística dirigida a explicar cómo plantear y resolver problemas matemáticos. En (Pólya, 1989) se recoge un modelo creado por Pólya que establece las cuatro fases de las que consta la resolución e invención de cualquier problema matemático. Por orden de desarrollo, estas cuatro fases son:

1. *Comprender el problema*. Entender el enunciado, ver claramente lo que se pide e identificar las incógnitas, los datos y las condiciones.
2. *Concebir un plan*. Saber, en general, qué cálculos, razonamientos y construcciones hacer para encontrar la solución.
3. *Ejecutar el plan*. Poner en práctica el plan concebido y desarrollarlo comprobando cada uno de los pasos.
4. *Revisar la solución*. Reconsiderar la solución, reexaminar el resultado y mejorar la solución. Verificar el resultado y el razonamiento.

Estas fases aparecen representadas en la *figura 3.3*, donde las flechas bidireccionales indican que si no se logra pasar a la siguiente fase, se suele dar marcha atrás.

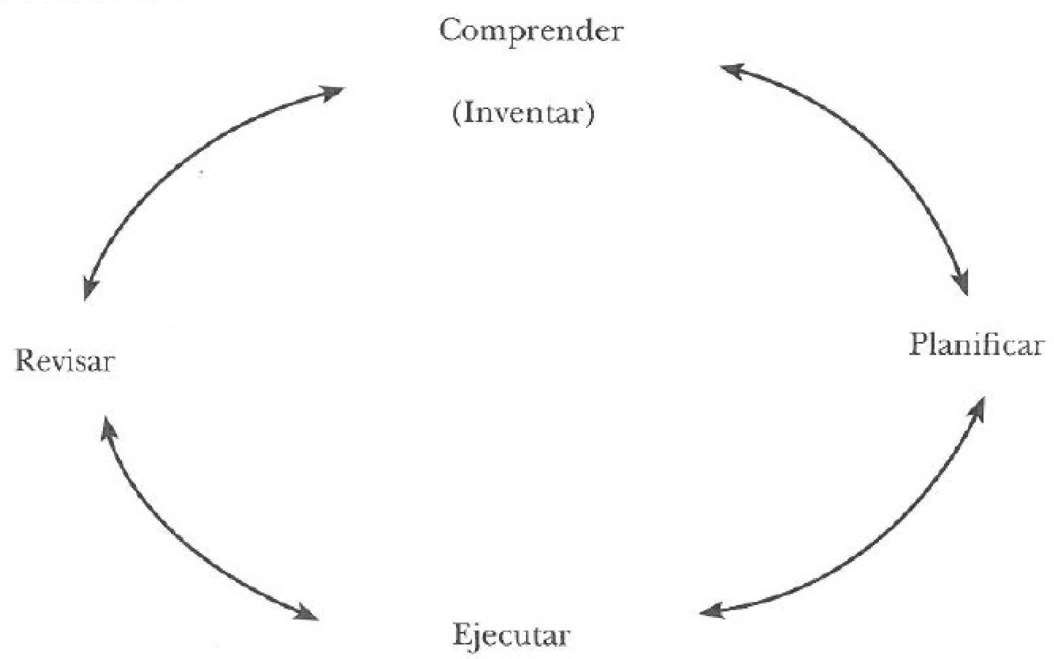


Figura 3.3. Cuatro fases de la resolución e invención de problemas. (Fuente: (Fernández y Barbarán, 2015)).

Cuando jugamos, pasamos de forma implícita e inconsciente por estas cuatro fases, con la diferencia de que en el juego pasamos por ellas de forma cíclica movimiento tras movimiento, respetando el turno.

1. *Comprender*. Conocemos los materiales del juego e intentamos entender sus reglas y su objetivo final. Entendemos la situación actual del juego e identificamos objetivos parciales para llegar a ganar.
2. *Planificar*. Mentalmente trazamos una serie de movimientos; es decir, una estrategia, un plan que nos acerque a alcanzar el objetivo final a través de objetivos parciales.
3. *Ejecutar*. Llevamos a cabo el plan poniéndolo en práctica por pasos.
4. *Revisar*. Examinamos los movimientos realizados para valorar su eficacia y, en consecuencia, decidir sobre nuestro siguiente movimiento, comenzando de nuevo las cuatro fases del modelo.

Podemos concluir este apartado afirmando que los juegos y las matemáticas tienen características en común, tanto en su finalidad como en su forma de proceder. Esto nos proporciona argumentos a favor de utilizar los juegos en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas que ampliamos en el siguiente apartado.

3.2.5. *¿Por qué utilizar los juegos en la clase de Matemáticas?*

Llegados a este punto, podemos tener la percepción de que el uso de juegos en la clase de Matemáticas puede ser beneficioso para el alumnado. En efecto, las razones que justifican la incorporación del juego en las aulas son abundantes y variadas. En mi opinión, una concisa y a la vez muy acertada clasificación de estas razones se encuentra en (Ferrero, 1991), que propone tres bloques fundamentales para apoyar y justificar el uso de los juegos en la Educación: el *carácter lúdico*, el *desarrollo de técnicas intelectuales* y el *valor social*.

- *Carácter lúdico*. Los juegos hacen que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea más motivador y divertido. No hay que confundir la diversión con una falta de objetivos educativos. El objetivo no es jugar, sino aprender jugando.
- *Desarrollo de técnicas intelectuales*. Los juegos provocan el desarrollo intelectual y permiten ejercitar las capacidades mentales. En concreto, el juego estimula la imaginación, favorece la creatividad, motiva el pensamiento crítico y mejora la deducción, la inducción, la estrategia y el razonamiento lógico.
- *Valor social*. Los juegos contribuyen al desarrollo social de la persona, ya que permiten desarrollar cualidades como la afirmación, la confianza, la cooperación, la comunicación, el trato con las personas, la aceptación de las normas, el trabajo en equipo, el reconocimiento al éxito de los compañeros…

Además de estos tres aspectos fundamentales, otras razones para incorporar los juegos en la educación son su contribución a desarrollar hábitos y actitudes positivas frente al trabajo escolar o romper con la aversión de los estudiantes hacia las Matemáticas (Ferrero, 1991). Con respecto a esto último, el divulgador de la ciencia Martin Gardner afirmaba: *con seguridad, el mejor modo de despertar a un estudiante consiste en presentarle un juego matemático intrigante (…)* (Gardner, 1980).

La taxonomía de Bloom y los juegos

La taxonomía de Bloom es un modelo jerárquico para clasificar los objetivos del aprendizaje de la educación en distintos niveles de dificultad que tiene en consideración tres dimensiones: la *afectiva*, la *psicomotora* y la *cognitiva*.

- *Dimensión afectiva*. Sus objetivos se refieren al plano emocional.
- *Dimensión psicomotora*. Sus objetivos se refieren a acciones físicas.
- *Dimensión cognitiva*. Sus objetivos se refieren al pensamiento.

Los juegos son actividades que desarrollan capacidades y habilidades de las tres dimensiones. Por un lado, en la dimensión afectiva, los juegos generan emociones como interés, sorpresa, diversión, entusiasmo o motivación. Por otro lado, en la dimensión psicomotora, los juegos desarrollan la coordinación, la expresión o la relación social. Por último, la dimensión cognitiva es la más estudiada y se divide en seis niveles (*figura 3.4*). Las capacidades del pensamiento de nivel inferior están en la base de la pirámide, mientras que las capacidades de nivel superior se sitúan en la cúspide. Las capacidades de nivel superior dependen de las adquiridas en los niveles inferiores.

Figura 3.4. Taxonomía de Bloom cognitiva revisada. (Fuente: (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del profesorado, 2017)).

Cuando participamos en un juego, trabajamos capacidades cognitivas de diversos niveles dependiendo del tipo de juego. En líneas generales, lo primero es conocer o recordar las reglas del juego (*nivel 1*) y comprenderlas (*nivel 2*) para poder usarlas y ejecutar acciones en el juego (*nivel 3*). A medida que se avanza en el juego, especialmente si es de estrategia, analizamos las jugadas posibles y las realizadas (*nivel 4*) para después evaluar su resultado (*nivel 5*). Por último, en base a lo anterior, elaboramos un plan para ganar o, al menos, no perder en el juego (*nivel 6*).

4. ESTADO DE LA CUESTIÓN

La Historia de las Matemáticas y el Aprendizaje Basado en Juegos son dos recursos que, como se ha expuesto en la sección anterior, pueden resultar de utilidad en las clases de Matemáticas. En esta sección, se revisa la situación de estos dos recursos en las aulas de Educación Secundaria. Para ello, se recurre a propuestas y experiencias de aula que utilizan estos dos recursos por separado o juntos. En primer lugar, se recogen propuestas y experiencias sobre la Historia de las Matemáticas, después sobre el Aprendizaje Basado en Juegos y por último, con ambos recursos combinados.

<u>Propuestas y experiencias con Historia de las Matemáticas</u>

Las propuestas para integrar la Historia de las Matemáticas en las clases son muchas y variadas. En (Maza, 1994) y (Lupiáñez, 2002) encontramos las siguientes propuestas generales: utilizar el método genético, estudiar la evolución de conceptos y notaciones, contar anécdotas del pasado, conocer las biografías de matemáticos y matemáticas, hacer introducciones históricas de unidades didácticas y conceptos, rescatar y resolver problemas históricos, impartir lecciones de Historia de las Matemáticas, usar y analizar textos matemáticos originales, crear pósters, murales, exposiciones u otros proyectos sobre temas históricos, descubrir las Matemáticas nacionales y locales, emplear errores del pasado y comparar técnicas y métodos matemáticos del pasado con los actuales analizando sus semejanzas y diferencias.

A continuación, se presentan algunas experiencias de aula en las que se pone en práctica el uso de la Historia de las Matemáticas.

El profesor Paolo Boero integró la Historia de las Matemáticas en un centro de Génova usando el método genético. Lo aplicó durante cinco años con estudiantes de edades comprendidas entre los 6 y los 14 años. Se trabajaron diversos temas, entre los que el propio Boero destaca el desarrollo histórico de:

- Aritmética para hacer cálculos sobre el tiempo y el dinero.
- Geometría en relación con Astronomía y problemas de sombras.
- Estadística sobre cuestiones sociales de tendencias y previsiones.

- Geometría de movimientos con máquinas y mecanismos articulados.

Esta experiencia mejoró la enseñanza de las Matemáticas propiciando sesiones más activas y motivadas para los estudiantes, permitiendo mostrar las Matemáticas como una disciplina en continua evolución que responde a las necesidades de la sociedad y de la época. Además, la asignatura adquirió un carácter más interdisciplinar al ser relacionada con otras disciplinas como la Astronomía o la Mecánica (Gutiérrez, 2010).

La Historia de las Matemáticas también fue incorporada al aula por la profesora Araceli Iglesias en un colegio de Madrid, con estudiantes de Bachillerato, al estudiar la evolución histórica de la Geometría y del Álgebra hasta el siglo XVII en una unidad didáctica denominada *Estudio analítico de la recta y la parábola*. La experiencia se apoyó en las siguientes actividades:

- Una breve introducción sobre la evolución del Álgebra y de la Geometría mencionando a las personas implicadas en su desarrollo.
- Un vídeo sobre el matemático René Descartes.
- El desarrollo de los contenidos de la unidad didáctica.
- La elaboración, por parte de los estudiantes, de murales sobre los siguientes cinco temas: *Evolución de la Geometría*, *Evolución de los símbolos algebraicos*, *La ciencia del siglo XVII*, *Biografías de Cardano y Tartaglia*, *Biografías de Descartes y Fermat*.

Esta experiencia de cinco semanas consiguió una clase más participativa y motivada y originó un diálogo con la profesora y entre los compañeros más profundo y productivo que en las clases tradicionales (Gutiérrez, 2010).

La unidad didáctica de integrales ofreció la oportunidad a la profesora Mónica Escudero de incluir la Historia de las Matemáticas en sus clases de 2º de Bachillerato. Lo hizo mediante un ejemplo histórico desarrollado por el matemático Pierre de Fermat en el que calculaba el área bajo la curva $y = x^n$. La puesta en práctica incluyó la resolución original aportada por Fermat y una colección de diapositivas sobre la vida del famoso matemático, además de numerosas anécdotas. Esta experiencia rompió la monotonía de las clases y despertó la curiosidad del alumnado sobre la manera de trabajar y de ser de los matemáticos, los sucesos alrededor de sus vidas, sus desencuentros y la repercusión de sus investigaciones (Escudero, 1997).

Una experiencia curiosa tuvo lugar en un colegio de Buenos Aires. La profesora explicó el teorema de Pitágoras y expuso brevemente información histórica acerca de la escuela pitagórica. Luego, los estudiantes, divididos en grupos, buscaron la biografía de Pitágoras e información sobre los pitagóricos, que completaron con la proyección de un vídeo. Después, se propuso una actividad individual o grupal consistente en escribir y dibujar una historieta que tratara contenidos matemáticos de la escuela pitagórica. Las historietas fueron presentadas ante los compañeros. Con esta actividad, el alumnado mejoró en creatividad, capacidad para comunicar ideas matemáticas con claridad, intercambio de ideas, trabajo cooperativo, responsabilidad para alcanzar un objetivo común y presentación de trabajos (de las Nieves, 2002).

La siguiente experiencia de aula se llevó a cabo en un curso de Bachillerato en México. De nuevo el tema elegido fue la escuela pitagórica; concretamente, los números poligonales. Tuvo una duración de 6 horas lectivas en las que se trabajó por parejas realizando diferentes tareas:

- El profesor explicó el pensamiento pitagórico sobre los números e introdujo algunas clasificaciones destacando los números poligonales.
- Los estudiantes resolvieron problemas sobre números poligonales relacionando la Aritmética con la Geometría y detectando patrones.
- Como actividad final, el alumnado demostró que todo número cuadrado es suma de dos números triangulares consecutivos.

En todo momento el profesor acompañó la explicación teórica y la resolución de ejercicios con datos históricos sobre la escuela pitagórica. Esta experiencia resultó interesante para la mayoría de estudiantes, tal y como manifestaron en un cuestionario de satisfacción, y mejoró la contextualización de la asignatura al relacionar las Matemáticas pitagóricas con el pensamiento filosófico de la Antigua Grecia (Salinas, Adamuz y Jiménez, 2011).

Con motivo de la celebración del día de Andalucía, un instituto andaluz realizó una actividad en la que los estudiantes de los primeros cursos de ESO elaboraron una exposición de murales sobre los matemáticos y científicos locales andaluces más destacados de la historia. El profesorado seleccionó personajes relevantes de la Matemática y la Ciencia de Andalucía y el alumnado, trabajando en grupos heterogéneos, buscó información biográfica y construyó el mural correspondiente al personaje asignado. La actividad se complementó con la resolución de problemas asociados a la Historia de la Ciencia andaluza. Los murales se expusieron en los pasillos del centro. Esta experiencia dio a conocer a los estudiantes personajes históricos que, mediante las Matemáticas y la Ciencia, contribuyeron al desarrollo del país. La actividad mejoró la implicación de los estudiantes en la asignatura de Matemáticas y les permitió acercarse al mundo científico (Jiménez y Jiménez, 2014).

Las WebQuest son un recurso informático bastante utilizado para dar a conocer la Historia de las Matemáticas a los estudiantes. En (Domínguez, Martín, Paralera, Romero y Tenorio, 2010) se presenta una WebQuest titulada *Mujeres en la Historia de las Matemáticas*, que hace un recorrido histórico por las Matemáticas a través de la vida y obra de mujeres matemáticas. Por otro lado, en (Falcón, Falcón, Núñez y Tenorio, 2010) se muestran tres WebQuest más sobre la Historia de las Matemáticas: *Las matemáticas a través del tiempo*, *Historia del Cálculo Diferencial* e *Historia de los números*. Por último, en (Falcón, Falcón, Núñez y Tenorio, 2009) se analizan en profundidad algunas WebQuest que no están tan enfocadas en la Historia de las Matemáticas, sin embargo todas ellas contienen una breve introducción histórica sobre el contenido matemático que desarrollan. Las WebQuest son actividades amenas y entretenidas que mejoran la implicación del alumnado, además de desarrollar su competencia digital.

Debido a todos estos ejemplos, considero positivo y recomendable utilizar la Historia de las Matemáticas en el aula. Pienso que enseñar a los estudiantes cuándo se desarrolló un cierto resultado matemático, quiénes lo hicieron y por qué, ayuda a contextualizar y conectar las Matemáticas con otras asignaturas, así como con la vida real, mostrando su utilidad. En mi opinión, la Historia de las Matemáticas permite al docente abrir un paréntesis entre las tecnicidades de la asignatura para acercarla al alumnado, algo que posiblemente agradecerá, ya que se rompe con la abstracción y la monotonía de las clases y se ofrece una visión más cultural, humana y aplicada de las Matemáticas.

Propuestas y experiencias con juegos

El uso de juegos en las aulas ha aumentado en los últimos años. En la actualidad, existe una cantidad abundante de propuestas y experiencias de aula que usan juegos. Algunos son tradicionales, como el dominó matemático o la oca matemática, que utiliza como dado los números obtenidos como soluciones de ecuaciones. Otros, emplean los recursos que nos proporcionan las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). Las siguientes dos experiencias de aula se sitúan en esta última línea haciendo uso de las TIC.

La siguiente experiencia de aula consiste en el uso de videojuegos para desarrollar la capacidad de resolución de problemas. Se puso en práctica con estudiantes de 1º de ESO utilizando *juegos flash* que están disponibles en Internet. Los videojuegos cuentan con niveles de dificultad creciente y el objetivo es alcanzar el último nivel o conseguir la mayor puntuación posible. En cada sesión se practicaron dos videojuegos de distinta temática, como los que aparecen en la *figura 4.1*: puzles clásicos adaptados a las nuevas tecnologías como el tangram o el sudoku, juegos basados en acertijos lógico-matemáticos clásicos, juegos mecánicos y de construcción que usan engranajes, muelles y otros objetos donde son necesarios principios matemáticos o físicos como la fuerza de la gravedad… Esta práctica aumentó la implicación de los estudiantes y propició la aparición de conductas de colaboración entre compañeros. Además, el alumnado mantuvo la atención mejor que en las clases tradicionales y la competitividad favoreció la motivación, la constancia y el esfuerzo para alcanzar el objetivo (Ueno, 2014).

Figura 4.1. Tangram (izquierda). Dynamic Systems 2 (derecha). (Fuente: (Ueno, 2014)).

El Ministerio de Robin Hood es una experiencia de aula que hace uso de los juegos para mejorar el presupuesto doméstico. Se ha llevado a cabo con estudiantes de segundo año del Programa de Mejora del Aprendizaje y del Rendimiento (PMAR). Los estudiantes se sumergen en un juego en el que intentan formar parte de un grupo liderado por Robin Hood, que ayuda a las familias a mejorar sus gastos domésticos. Para conseguirlo, deben resolver actividades matemáticas agrupadas en cuatro niveles, cada uno con cuatro misiones. Dichas misiones consisten, principalmente, en juegos mediante la página web https://matematico.es/ y en cuestionarios con Kahoot! o Plickers. Cada nivel trata una forma de ahorrar: el consumo de agua, la cesta de la compra, el consumo eléctrico y las finanzas de los bancos. El alumnado trabaja la proporcionalidad, los porcentajes, las progresiones aritméticas y geométricas y el interés simple, entre otros contenidos. Los estudiantes se convierten en miembros del Ministerio de Robin Hood si superan todas las misiones. Además, si consiguen la puntuación máxima en algún nivel, se conceden poderes especiales que se intercambian por ciertos premios, como por ejemplo poder usar los apuntes de clase durante los diez primeros minutos de un examen. Esta experiencia consiguió mantener la motivación del alumnado mejor que en las clases tradicionales y aumentó la participación y el compromiso de los estudiantes con la actividad. Además, consiguió relacionar las Matemáticas con temas de la vida cotidiana, mostrando su utilidad (Hernández, 2018).

Propuestas y experiencias con Historia de las Matemáticas y juegos

La cantidad de propuestas y experiencias de aula que mezclan la Historia de las Matemáticas y los juegos es obviamente menor que en los casos anteriores. En los siguientes párrafos se presentan algunas de ellas.

En un centro de Barcelona se puso en práctica una experiencia conocida como *dominó de fracciones egipcias* con estudiantes de Secundaria. En primer lugar, se introdujeron los signos del sistema jeroglífico egipcio de numeración y se comentaron las ventajas de los sistemas de numeración posicional frente a los no posicionales. Luego, el profesor presentó el Papiro de Rhind explicando algunos de sus ejercicios sobre fracciones y propuso distintas actividades que consisten en escribir fracciones egipcias en el sistema actual y viceversa. Por último, los estudiantes fabricaron un dominó de fracciones egipcias con el que acabaron jugando (*figura 4.2*). Con esta experiencia, los estudiantes desarrollaron su capacidad de análisis, relación y síntesis, y conocieron elementos de la Historia de las Matemáticas en relación con Ciencias Sociales como la Geografía o la Historia (Giménez, 1986).

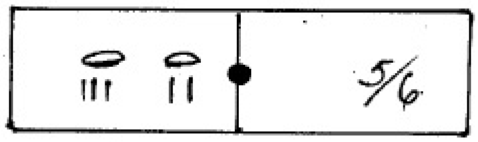


Figura 4.2. Ficha del dominó de fracciones egipcias. (Fuente: (Giménez, 1986)).

Un tipo de propuesta que cuenta con bastantes recursos en Internet son los juegos de cartas sobre Historia de las Matemáticas. El juego de cartas *Top Female Scientists* rinde homenaje a las mujeres científicas. Las cartas contienen el nombre, una imagen, las fechas de nacimiento y muerte, las áreas de estudio, una breve biografía y cuatro características puntuadas sobre el trabajo y la personalidad de cada científica (*figura 4.3*). Hay científicas de campos de estudio distintos: biología, geología, física, matemáticas y química, dando lugar a un juego interdisciplinar. Las reglas del juego se pueden consultar en (Macho, 2017). Existen otros juegos de cartas similares como *Women in science*, *Herstóricas pioneras* (sobre científicas españolas) o

Sapiencia. Estos juegos reconocen el trabajo científico de las mujeres mostrando sus aportaciones, despiertan la curiosidad de chicos y chicas por la ciencia y promueven los valores de igualdad de género.

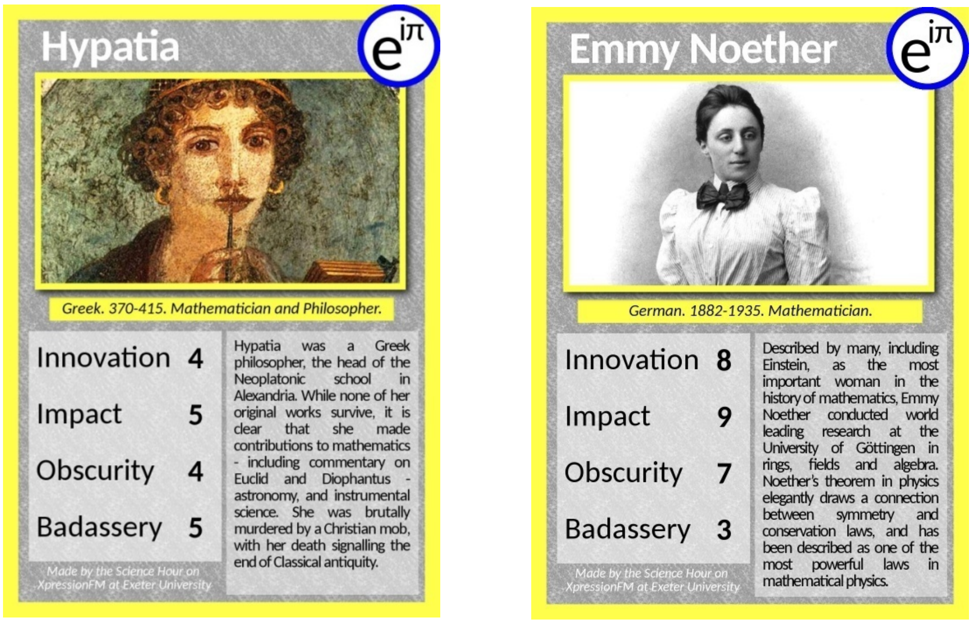


Figura 4.3. Cartas de Hipatia y Noether de Top Female Scientists. (Fuente: (Macho, 2017)).

El instituto riojano La Laboral de Lardero preparó el pasado mes de junio una Escape Room para su alumnado de 1º y 2º de Bachillerato. La temática versó sobre la Historia de las Matemáticas; concretamente, el tema elegido fue el trabajo realizado por cinco mujeres matemáticas que durante la Segunda Guerra Mundial decodificaron mensajes secretos nazis junto con el matemático Alan Turing. La actividad se desarrolló en inglés y las pistas para encontrar la salida usaban conocimientos de distintas asignaturas como Matemáticas, Geografía e Historia, Tecnología, Física y Química, Filosofía y Lengua; por tanto, tuvo un fuerte carácter interdisciplinar. Se constituyeron grupos que representaban a cada una de estas cinco mujeres matemáticas con el objetivo de descubrir al asesino y salir de la Escape Room antes de 50 minutos. Esta experiencia, que combinó la Historia de las Matemáticas con los juegos, fue valorada muy positivamente por los estudiantes, quienes la encontraron muy divertida. Además, la actividad fomentó el trabajo cooperativo en equipo (Instituto de Educación Secundaria La Laboral, 2019).

Para terminar, incluyo dos propuestas más informales que no están directamente asociadas al currículo de Matemáticas, aunque la idea se puede adaptar al temario. Son *Trivial matemático* y *Timeline* (Educación 3.0, 2019).

- *Trivial matemático*. Este juego reproduce el conocido juego *trivial*, pero con contenido matemático. Consta de diferentes categorías como Números, Álgebra o Geometría, incluyendo a veces una categoría sobre Historia de las Matemáticas.
- *Timeline*. Se trata de una baraja de cartas con acontecimientos históricos fechados por una de las caras. El objetivo es ordenar las cartas según la fecha histórica formando una línea del tiempo. Gana el primero que se descarta colocando correctamente las cartas en la línea del tiempo. La versión del juego llamada *ciencia y descubrimientos* recoge contenidos del currículo de ESO y Bachillerato como las fracciones, el teorema de Pitágoras, el cálculo de la circunferencia de la Tierra de Eratóstenes, el número cero, los signos de suma y multiplicación actuales, la teoría de probabilidad o la geometría euclídea.

En vista de estas experiencias con resultados positivos al incluir los juegos en las clases de Matemáticas, considero beneficioso y aconsejable su uso en el aula. Las actividades mediante los juegos son novedosas, más entretenidas que las tareas tradicionales y rompen con la rutina de la clase, algo que en general será bien recibido por la mayor parte del alumnado. Por todo esto, pienso que probablemente incrementen la motivación de los estudiantes, así como su implicación y participación en la tarea.

Los ejemplos expuestos anteriormente muestran los beneficios que se pueden conseguir al integrar la historia y los juegos en las clases de Matemáticas. Los buenos resultados que se han obtenido son un punto de partida a tener en cuenta y me animan en la elaboración de mi propuesta de innovación educativa, que se desarrolla en la siguiente sección.

5. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN DIDÁCTICA

5.1. Introducción

La propuesta de innovación educativa que se presenta a continuación consiste en un juego educativo matemático mixto, que combina características de los juegos de conocimiento, estrategia y azar permitiendo a los estudiantes conocer aspectos de la Historia de las Matemáticas al mismo tiempo que resuelven ejercicios matemáticos basados en el currículo oficial de Matemáticas. Se trata de un juego de tablero de tipo post-instruccional pensado como una actividad para ser llevada a clase al final del curso académico, sirviendo para repasar y consolidar lo aprendido durante el año. Está especialmente diseñado para el curso de 2º de ESO en base a los contenidos establecidos en el currículo de la asignatura de Matemáticas, pero la idea del juego puede adaptarse al temario de otros cursos. En el juego se trabajan diez contenidos matemáticos concretos de 2º de ESO en relación con las correspondientes civilizaciones históricas o con los personajes históricos que estuvieron implicados en su desarrollo.

5.2. Objetivos específicos

El objetivo didáctico principal que se quiere alcanzar con esta propuesta de innovación educativa es:

- Repasar y consolidar contenidos matemáticos trabajados durante el curso académico mediante la resolución de ejercicios que estén contextualizados en la Historia de las Matemáticas.

Los contenidos concretos que se desean repasar y consolidar con esta propuesta se encuentran en la siguiente sección. Otros objetivos que también se persiguen con esta actividad son:

- Conocer aspectos históricos de las matemáticas sobre civilizaciones y personajes destacados y la Matemática que construyeron.
- Ubicar en tiempo y lugar contenidos del currículo de Matemáticas y relacionarlos con la historia y el desarrollo de la humanidad.

- Desarrollar mediante el juego capacidades del pensamiento útiles en matemáticas como son analizar, razonar o planificar.
- Aprender a trabajar en equipo de forma cooperativa para lograr un objetivo común, fomentando actitudes como el intercambio de opiniones o la toma de decisiones en conjunto.
- Apreciar y valorar las matemáticas de otras culturas, civilizaciones y personajes de diferentes épocas.

5.3. Contenidos

El juego que aquí se propone consta de diez tarjetas (*anexo 2*), cada una de las cuales trabaja un determinado contenido matemático del curso en relación con la correspondiente civilización histórica o personaje histórico que destacó por su implicación en su desarrollo. Los estudiantes deberán resolver por parejas diez ejercicios matemáticos, uno por cada una de las tarjetas. En la *tabla 5.1* se detallan los diez contenidos matemáticos de los ejercicios junto con la civilización o personaje implicado en su desarrollo.

Civilizaciones / Autores	Contenido matemático de los ejercicios
Antiguo Egipto	Volumen de pirámides y troncos de pirámides
Babilonia	Raíces cuadradas aproximadas
Escuela Pitagórica	Números poligonales
Euclides	Algoritmo de Euclides para el máximo común divisor
Arquímedes	Notación científica
Al-Juarismi	Ecuaciones de segundo grado
Descartes	Coordenadas cartesianas
Euler	Característica de Euler para poliedros
Laplace	Regla de Laplace para el cálculo de probabilidades
Gauss	Sistemas lineales por el método de reducción

Tabla 5.1. Contenidos del juego. (Fuente: elaboración propia).

La elección de estos contenidos tiene en cuenta la variedad de civilizaciones históricas y personajes históricos de diversas épocas, aunque resulta inevitable la predominancia de épocas más antiguas frente a las más modernas debido a la forma en que está establecido el currículo oficial de la asignatura. Por otro lado, se abarcan temas de todos los bloques del currículo de 2º de ESO.

La *tabla 5.2* contiene la relación entre las civilizaciones y los personajes que aparecen en el juego y los contenidos de 2º de ESO, tal y como se recogen en el currículo oficial del Boletín Oficial de La Rioja (BOR) (Consejería de Educación, Cultura y Turismo, 2015), según la actual Ley de Educación, la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE).

Civilizaciones / Autores	Presencia de los contenidos del juego en el currículo del BOR
Antiguo Egipto	**Poliedros** y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y **volúmenes**.
Babilonia	Cuadrados perfectos. **Raíces cuadradas**. Estimación y obtención de **raíces aproximadas**.
Escuela Pitagórica	Significados y propiedades de los números en contextos diferentes al del cálculo: **números triangulares, números cuadrados, números pentagonales**, etcétera.
Euclides	Propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, **divisibilidad** y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números.
Arquímedes	Potencias de base 10. Utilización de la **notación científica** para representar números grandes.
Al-Juarismi	**Ecuaciones** de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) y **de segundo grado con una incógnita (método algebraico)**. Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.
Descartes	**Coordenadas cartesianas**: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
Euler	**Poliedros** y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. **Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros**. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico.
Laplace	Cálculo de probabilidades mediante la **regla de Laplace** en experimentos sencillos.
Gauss	**Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**. **Métodos algebraicos** de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.

Tabla 5.2. Contenidos del juego en el BOR. (Fuente: (Consejería de Educación, Cultura y Turismo, 2015)).

5.4. Trabajo previo

La actividad se podría llevar directamente al aula sin ningún trabajo previo, ya que se trata de repasar y consolidar conocimientos matemáticos que ya han sido trabajados en clase, a la vez que se aprenden algunos aspectos de Historia de las Matemáticas. Sin embargo, me parece más adecuado introducir la Historia de las Matemáticas brevemente durante la explicación de las unidades didácticas con el fin de que el juego no sea la primera toma de contacto con esta disciplina. De esta forma, el alumnado puede relacionar mejor los conocimientos aprendidos durante el curso.

Una manera de realizar este trabajo previo es utilizando introducciones históricas breves en las unidades didácticas correspondientes a los contenidos que se trabajan en el juego, dando a conocer sucintamente las civilizaciones y datos biográficos de los personajes que los desarrollaron y que también aparecerán en el mismo. Considero que el uso de breves biografías es una buena forma de introducir la Historia de las Matemáticas porque es bastante completa al combinar características de Historia interna e Historia externa.

Este pequeño trabajo previo realizado durante el curso académico permitirá a los estudiantes sentirse más cómodos y seguros con la actividad novedosa del juego, ya que conectará mejor la actividad lúdica con el resto del curso y del temario. De este modo, la actividad queda integrada en el curso, no siendo para nada una actividad de relleno. La visión que tengan los estudiantes de la actividad y cómo la perciban es fundamental para que sea exitosa. El objetivo no es jugar, sino aprender a través del recurso del juego.

Por otro lado, el juego que se presenta se desarrollaría a final de curso, en el tercer trimestre, pero los contenidos matemáticos del juego no pertenecen exclusivamente al último trimestre; por tanto, pienso que antes de poner en práctica el juego en el aula, sería conveniente que el docente realizara una puesta en común con los estudiantes para recordar brevemente los contenidos que aparecen en el juego (por ejemplo, mediante una *tormenta de ideas* dirigida por el docente, a modo de evaluación inicial para activar los conocimientos previos). Creo que esto ayudaría al alumnado a situarse en la actividad, porque probablemente algunos contenidos del juego les parecerán algo lejanos en el tiempo.

5.5. Descripción del juego

5.5.1. *Materiales y recursos*

Los materiales necesarios para poner en práctica este juego son:

- Un tablero donde se desarrolla el juego (*anexo 1*).
- Un dado tetraédrico con las caras numeradas del 1 al 4.
- Cuatro fichas de parchís de distintos colores (aquí usaremos rojo, azul, verde y amarillo) para registrar los movimientos sobre el tablero.
- Diez tarjetas con los textos históricos y su contenido matemático correspondiente (*anexo 2*). Estas tarjetas sirven para transmitir al alumnado la información histórica que queremos que conozcan, en relación con el contenido matemático que se quiere trabajar. Además, muestran ejemplos que los estudiantes pueden usar como referencia para resolver los ejercicios propuestos. En la elaboración de las tarjetas se han usado los libros (Boyer, 1986) y (Kline, 1992).
- Una hoja con los ejercicios matemáticos a resolver (*anexo 3*).
- Una hoja con las soluciones de los ejercicios (*anexo 3*).
- Una hoja de respuestas para que los estudiantes resuelvan los ejercicios, que será entregada al finalizar la actividad (*anexo 4*).
- Una hoja con la plantilla de la *tabla 5.4* para que los estudiantes anoten las puntuaciones que vayan obteniendo en el transcurso del juego.
- Material de escritura: folios, bolígrafos… (es necesaria la calculadora).

En cuanto a los recursos, para el diseño de los materiales se necesita un ordenador que disponga de un procesador de textos y una impresora tradicional. Para la puesta en práctica de la actividad, no es necesario ningún recurso tecnológico adicional.

5.5.2. *Mecánica del juego: reglamento*

<u>Participantes</u>. En el juego intervienen 8 participantes agrupados por parejas formando 4 equipos: el equipo rojo, el equipo azul, el equipo verde y el equipo amarillo.

Tablero. El tablero del juego tiene forma de serpiente y está compuesto por 50 casillas numeradas más la casilla de inicio. Denominaremos *casillas especiales* a aquellas que están marcadas con las civilizaciones o los personajes asociados a los contenidos de las 10 tarjetas: Antiguo Egipto (casilla 5), Babilonia (casilla 10), Escuela Pitagórica (casilla 15), Euclides (casilla 20), Arquímedes (casilla 25), Al – Juarismi (casilla 30), Descartes (casilla 35), Euler (casilla 40), Laplace (casilla 45) y Gauss (casilla 50). Llamaremos *casillas de atajo* a las casillas cuyas numeraciones son: 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43 y 48.

Inicio. Para determinar qué equipo comienza la partida, se utiliza la típica salida *el que saque más puntos*. Cada equipo tira el dado y el que saque la puntuación más alta es el que comienza la partida. En caso de empate, los empatados a la puntuación más alta vuelven a lanzar el dado, repitiendo este proceso hasta romper el empate. Una vez determinado el equipo que comienza la partida, se cede el turno siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj. Se parte de la casilla del tablero denominada *Inicio*.

Turno. La pareja que disponga del turno lanzará el dado una sola vez y moverá su ficha tantas casillas como indique el número obtenido en el lanzamiento si lo considera oportuno. Luego cederá el turno a la siguiente pareja.

Posiciones y puntuaciones. La idea de posición es muy importante porque influirá en los ejercicios a realizar por los estudiantes. Supongamos que, en un cierto momento del juego, la ficha roja es la primera en llegar a una casilla especial (por ejemplo, la número 5 que corresponde al Antiguo Egipto). Supongamos también que en ese momento las otras fichas se encuentran dispuestas sobre el tablero de la siguiente forma: la ficha azul en la casilla 4, la ficha verde en la casilla 3 y la ficha amarilla en la casilla 2. Entonces, diremos que la ficha roja ocupa la primera posición, la ficha azul la segunda posición, la ficha verde la tercera posición y la ficha amarilla la cuarta posición, de acuerdo a la distancia que las separa de la casilla especial. Los estudiantes canjearán estas posiciones por puntos según la *tabla 5.3* y se anotarán en la *tabla 5.4* cada vez que una pareja llegue con su ficha a una casilla especial; por tanto, durante el juego se anotarán diez posiciones, ya que hay diez casillas especiales.

Posición	Puntos
Primera posición	2 puntos
Segunda posición	2 puntos
Tercera posición	1 punto
Cuarta posición	1 punto

Tabla 5.3. Relación posición – puntuación. (Fuente: elaboración propia).

	Resultados posiciones – puntuaciones en el tablero de juego			
	Equipo Rojo	**Equipo Azul**	**Equipo Verde**	**Equipo Amarillo**
Antiguo Egipto				
Babilonia				
Escuela Pitagórica				
Euclides				
Arquímedes				
Al – Juarismi				
Descartes				
Euler				
Laplace				
Gauss				
Puntuaciones Totales				

Tabla 5.4. Plantilla para anotar las puntuaciones. (Fuente: elaboración propia).

En el caso de que varias fichas se encuentren sobre la misma casilla, en el momento en que alguien llegue a una casilla especial se concederá a todas las fichas que comparten casilla la posición más alta. Por ejemplo, si la ficha roja se encuentra en la casilla especial 5, la ficha azul en la casilla 3, la ficha verde en la casilla 3 y la ficha amarilla en la casilla 2, entonces diremos que la ficha roja ocupa la primera posición, las fichas azul y verde la segunda posición y la ficha amarilla la tercera posición.

Casilla especial. En el momento en que una ficha cae en una casilla especial, se anotan las posiciones obtenidas en la *tabla 5.4* y después se toma la tarjeta correspondiente a dicha casilla especial para que cada pareja la lea y resuelva el ejercicio asociado a esa tarjeta que corresponda a su posición. Por ejemplo, si una pareja queda en tercera posición, deberá resolver el ejercicio número tres. Cuando todas las parejas hayan resuelto sus ejercicios, la partida continúa siguiendo con el turno correspondiente. Si la solución del ejercicio es correcta, coincidiendo con la de la hoja de soluciones, se sumarán 3 puntos y se anotarán en la misma plantilla de la *tabla 5.4* anterior, junto a las puntuaciones obtenidas por las posiciones. En caso contrario, no se suma ningún punto.

Objetivo. El objetivo del juego es sumar la mayor cantidad posible de puntos. El juego termina cuando las cuatro parejas resuelven los ejercicios correspondientes a la última casilla especial, que corresponde a Gauss (casilla 50). Al finalizar el juego, se sumarán todos los puntos obtenidos por cada pareja de equipo, resultando ganadora del juego aquella que haya obtenido más puntos. En caso de empate, la pareja ganadora será la que haya resuelto correctamente más ejercicios. Si persiste el empate, se considerarán ganadoras todas las parejas empatadas con la mayor puntuación.

Por otro lado, aparte de ganar el juego obteniendo la mayor puntuación, no se debe olvidar el objetivo de resolver correctamente los ejercicios (procedimiento y solución), ya que constituyen una gran parte de la calificación de la actividad, como se verá en el apartado *evaluación*.

Movimientos. En la lucha por llegar a cada casilla especial en la mejor posición posible, deben respetarse las siguientes reglas de movimiento:

- Una vez obtenida la puntuación en la tirada del dado, la ficha se puede mover tantas casillas como indique el dado, bien hacia adelante o bien hacia atrás. También se permite no mover la ficha, pasando el turno de lanzamiento a la siguiente pareja.
- En la lucha por llegar a una casilla especial, las fichas nunca podrán estar en una casilla con una numeración mayor la casilla especial por la que se está luchando. Por ejemplo, si se está luchando por caer en la casilla especial 5 del Antiguo Egipto y se tiene la ficha en la casilla 4, si sale en el dado un 3 las únicas dos posibilidades son mover la ficha 3 casillas hacia atrás o bien no moverla cediendo el turno a la siguiente pareja.
- Cuando una ficha cae en una casilla ocupada por otra u otras fichas, ésta tiene la posibilidad de comer a todas las fichas que estaban allí previamente devolviéndolas a la casilla especial anterior más próxima. En este sentido, la casilla de inicio cuenta como casilla especial. Cada

pareja puede utilizar esta regla de comer otras fichas como máximo 3 veces durante la partida. Las fichas situadas sobre las casillas especiales no se pueden comer.

- Si se cae en una casilla de atajo, se puede mover la ficha a cualquier otra casilla de atajo siempre que no supere en numeración a la casilla especial por la que se está luchando (ya que daría lugar a reglas contradictorias).

5.5.3. *Dinámica del juego*

<u>Niveles de dificultad y estrategias</u>. Cada casilla especial tiene asociados 4 ejercicios que están agrupados en dos niveles de dificultad con el propósito de dar cabida a distintas estrategias. Los dos primeros ejercicios son más difíciles, mientras que los dos últimos son más fáciles. El reglamento del juego permite, básicamente, dos estrategias diferentes. En un cierto momento de la partida, en vista de las puntuaciones acumuladas hasta ese momento por los equipos, los estudiantes pueden valorar si prefieren sumar más puntos por la posición, sabiendo que los ejercicios asociados a las dos primeras posiciones son más difíciles, o bien sumar menos puntos por la posición, sabiendo que los ejercicios asociados a las dos últimas posiciones son más fáciles.

Según lo establecido hasta ahora, podría ocurrir que ningún equipo quisiera llegar en primera posición a la casilla especial y todos cedieran el turno o movieran su ficha hacia atrás; en consecuencia, la partida se estancaría. Para evitar esta situación, impondremos la siguiente condición: si los cuatro equipos ceden el turno de manera consecutiva sin efectuar ningún movimiento o haciéndolo hacia atrás, a partir de entonces y hasta que alguna pareja alcance la casilla especial, será obligatorio realizar el movimiento hacia adelante que indique el dado, salvo que el reglamento anterior no permita a alguna pareja hacer ningún movimiento en ese lanzamiento.

5.6. Temporalización

La actividad está pensada para ser desarrollada en dos días. El primer día, en una sesión de 60 minutos, se presentará la actividad al alumnado explicando con detalle el funcionamiento y la evaluación del juego. También se constituirán los grupos de 8 jugadores y las parejas de equipo, intentando que las agrupaciones sean heterogéneas y equilibradas. El segundo día consistirá en dos sesiones seguidas de 60 minutos cada una. Esto se hará así porque, en caso contrario, se interrumpiría el desarrollo del juego, pudiendo resultar confuso para el alumnado recordar la situación de la partida en la sesión anterior (turno, colocación de las fichas…). En primer lugar, se hace la evaluación inicial comentada en la sección *5.4. Trabajo previo*. Después, se pone en práctica el juego. Por último, los estudiantes entregarán sus ejercicios y rellenarán las fichas de autoevaluación y coevaluación, así como la encuesta de satisfacción de la actividad. La *tabla 5.5* contiene la temporalización detallada de estas tareas.

Partes de la actividad	Minutos
Día 1 – Una sesión	60
Explicación de la actividad y constitución de los grupos	60
Día 2 – Dos sesiones	120
Evaluación inicial / Conocimientos previos	10
Puesta en práctica del juego por parte de los estudiantes	100
Autoevaluación, coevaluación y encuesta de satisfacción	10

Tabla 5.5. Temporalización de la actividad. (Fuente: elaboración propia).

En general, se ha estimado que el tiempo necesario para llegar a cada casilla especial, leer el contenido de su tarjeta y resolver el ejercicio correspondiente es de unos 10 minutos. Por tanto, como hay 10 casillas especiales, la puesta en práctica del juego requiere de 100 minutos.

5.7. Evaluación

La evaluación se divide en dos partes. En primer lugar, se explica cómo se va a evaluar y calificar al alumnado en la actividad, y después se incluye una evaluación de la actividad desde el punto de vista del profesorado.

5.7.1. *Evaluación del alumnado*

La evaluación del alumnado en la actividad consta de dos partes bien diferenciadas: la actitud durante el desarrollo del juego y la hoja de respuestas a los ejercicios que los estudiantes entregarán al final. Se valorará la actitud con un porcentaje del 20% y la hoja de respuestas con un 80%.

Dependiendo de la clase, el número de estudiantes en el aula puede dificultar la valoración de la actitud; por tanto, además de ser valorada por el docente a través de la observación, también será evaluada por los propios estudiantes mediante una autoevaluación y una coevaluación de la pareja de equipo. La evaluación de la actitud se basará en la rúbrica de la *tabla 5.6*.

	Rúbrica para evaluar la actitud durante el juego			
	4	3	2	1
Parte teórica	He escuchado atentamente la explicación de la parte teórica del juego: funcionamiento, reglas, evaluación, etcétera.	He estado en silencio durante la explicación teórica, pero sin prestar atención.	No he escuchado la explicación teórica y el profesor me ha llamado la atención.	No he escuchado la explicación teórica y he molestado a los demás.
Actitud en el aula	He estado atento, interesado y motivado en todo momento.	He mantenido una actitud correcta, pero por momentos me he desinteresado.	He mantenido un comportamiento adecuado, pero no he tenido interés.	Mi comportamiento no ha sido correcto y no he tenido interés.
Trabajo en grupo	He colaborado y participado activamente con los compañeros aportando ideas, resolviendo dudas, escuchando y respetando a los demás.	He colaborado con los compañeros, pero mi participación ha sido algo pasiva.	He colaborado y participado solo cuando era estrictamente necesario o cuando los compañeros me lo han solicitado.	No he colaborado, no he participado y me he mantenido bastante al margen.

Tabla 5.6. Rúbrica para evaluar la actitud. (Fuente: elaboración propia).

Cada estudiante rellenará, basándose en la rúbrica anterior, una ficha como la que se muestra en la *tabla 5.7* que recoge la autoevaluación y la coevaluación de la actitud. La evaluación de la actitud por parte del docente y por parte del estudiante tendrá el mismo peso, un 10% en ambos casos, que suman el 20%.

	Nombre y apellidos	Parte teórica	Actitud en el aula	Trabajo en grupo
Tú (Autoevaluación)				
Tu pareja de equipo (Coevaluación)				

Tabla 5.7. Autoevaluación y coevaluación de la actitud. (Fuente: elaboración propia).

Por último, la evaluación de la hoja de respuestas a los ejercicios la realizará el docente mediante la corrección y calificación de las respuestas de los estudiantes teniendo en cuenta tanto el procedimiento como la solución.

5.7.2. *Metaevaluación*

Además de la evaluación del alumnado, se realizará una evaluación de la actividad desde el punto de vista del docente con el objetivo de conocer las impresiones de los estudiantes y detectar aspectos a mejorar en el futuro. Para ello, cada estudiante rellenará anónimamente un cuestionario de satisfacción como el que se encuentra en el *anexo 5*. A través del cuestionario, se pueden valorar diversos aspectos: los contenidos matemáticos, las relaciones sociales, el trabajo en equipo, la actuación del profesor, la duración y la evaluación de la actividad y el interés generado por la misma.

6. DISCUSIÓN

La propuesta de innovación educativa planteada en la sección anterior cuenta con un conjunto de ventajas e inconvenientes en cuanto a su viabilidad en el aula que pasamos a comentar a continuación. Comenzamos primero por destacar algunas ventajas.

Motivación. Previsiblemente, los estudiantes estarán más motivados que en las clases tradicionales, ya que se trata de una actividad novedosa que rompe con la rutina. Pienso que el carácter recreativo del juego y la competitividad son dos factores que inciden en el aumento de la motivación. Sin embargo, la competitividad también puede ser algo negativo si es excesiva, o si en el juego alguien se queda sin opciones de ganar, porque puede desalentarse y perder el interés por la actividad. Para tratar de evitarlo, me parece importante supervisar la competitividad del alumnado y confeccionar cuidadosamente los grupos y las parejas del juego tratando de que sean grupos heterogéneos y parejas equilibradas, reduciendo la descompensación en los niveles de instrucción.

Por otro lado, puede producirse una motivación pasajera si este tipo de actividades se repiten con demasiada frecuencia. En este caso, la propuesta se pone en práctica solamente una vez al final del curso, pero considero que no conviene recargar la enseñanza con continuos juegos porque se perdería la sorpresa y el interés del alumnado.

En definitiva, una mayor motivación, probablemente, aumentará el nivel de implicación del alumnado en la tarea, y en el mejor de los casos, podría aumentar el interés por la asignatura al darle una perspectiva diferente mediante la Historia de las Matemáticas bajo la forma de un juego.

Relaciones sociales. El trabajo en grupos y por parejas de la propuesta fomenta las relaciones sociales entre los compañeros más que el método tradicional de impartir clase, ya que necesitan comunicarse, colaborar, contrastar ideas… Creo que esto puede ayudar a mejorar sus habilidades sociales y la cohesión del grupo-clase como se refleja en (Gairín, 1990). La actividad también puede ser una oportunidad para mejorar las relaciones entre el profesorado y el alumnado, al tratarse de una práctica más amena en la que el docente puede asumir un rol distinto al habitual, mostrándose más cercano y derribando la barrera entre profesor y estudiante de la clase magistral tradicional.

Papel activo del estudiante. Frente a la forma tradicional de impartir clase, en la que los estudiantes tienen un papel pasivo siendo simples receptores de información, la propuesta aquí planteada sitúa al estudiante en el centro de la actividad, convirtiéndolo en el protagonista. El repaso de los contenidos bien se podría hacer mediante una exposición magistral clásica; sin embargo, la propuesta anterior requiere de la participación activa del estudiante, porque debe leer información, trabajar en equipo y resolver ejercicios matemáticos, lo que le proporciona más autonomía en su aprendizaje.

Cultura. Muy pocos estudiantes saben quién fue Al – Juarismi o Gauss, ya que las clases de Matemáticas habituales no incluyen la historia. La actividad propuesta aquí es culturalmente más rica al considerar algunos aspectos históricos de las matemáticas y, en mi opinión, ofrece una visión más completa, interdisciplinar y aplicada de la asignatura.

Noción del tiempo. Las típicas clases de Matemáticas se centran en los aspectos técnicos de la disciplina. La propuesta anterior otorga importancia a lo técnico, ya que se resuelven ejercicios matemáticos del currículo, pero también a la historia. El juego presentado hace un recorrido cronológico a través de las matemáticas, ofreciendo al alumnado la ocasión de organizar temporalmente los resultados matemáticos expuestos en clase y formar la noción del tiempo (Gutiérrez, 2010).

Autoevaluación. Al tratarse de una actividad para repasar y consolidar los contenidos explicados y trabajados anteriormente, los estudiantes pueden reflexionar acerca de los conocimientos adquiridos durante el curso académico y ser conscientes de su propio aprendizaje, mejorando la competencia de *aprender a aprender*.

Materiales e instalaciones. Los materiales para la actividad son de fácil adquisición o construcción, como los dados, las fichas y el papel para el tablero o las tarjetas que se puede plastificar para aumentar su durabilidad. Además, se pueden diseñar mediante cualquier ordenador con el software Word u otro similar. Por tanto, no es necesario que el centro disponga de una gran infraestructura ni de grandes recursos tecnológicos; son materiales bastante tradicionales. En cuanto a las instalaciones, la actividad se puede desarrollar en el aula usual.

Después de haber presentado estas ventajas, al plantear una propuesta de innovación educativa para intentar mejorar la enseñanza y el aprendizaje, debemos ser críticos y reflexionar también acerca de los inconvenientes de la misma. A continuación, se presentan algunas desventajas de la propuesta.

Tiempo de preparación y ejecución de la actividad. El tiempo invertido por el docente en la planificación de la actividad, la elaboración de sus materiales y su evaluación y calificación es mayor que en las actividades convencionales, aunque después de la primera vez que se pone en práctica, el trabajo es menor. Por otro lado, el trabajo previo de introducir la Historia de las Matemáticas en las unidades didácticas asociadas a los contenidos del juego consume un cierto tiempo del que el docente no siempre dispone. Por último, en la temporalización de la actividad se emplean dos horas seguidas para el desarrollo de la misma; esto implicaría intercambiar o pedir prestada alguna hora a profesores de otras asignaturas.

Distracción del objetivo. Debido al carácter lúdico del juego, los estudiantes pueden perder de vista el objetivo didáctico de la actividad. Para intentar que esto no suceda, creo que el docente debe hacer una buena presentación y explicación de la actividad, resaltando que se trata de aprender jugando, no exclusivamente de jugar.

Control del aula. Basándome en la experiencia del período de prácticas, creo que el control del aula cuando se ponen en práctica actividades lúdicas es más difícil y es necesario que el docente haga un esfuerzo extra para que la actividad se desarrolle de acuerdo con la planificación y así poder cumplir con los objetivos. El alto número de estudiantes en las clases tampoco ayuda en este sentido. Como solución, podría solicitarse el apoyo de otros miembros del profesorado para la puesta en práctica de la actividad. Una alternativa más factible sería elegir a algunos estudiantes responsables o respetados por la clase y otorgarles la tarea de supervisar en cada grupo de 8 jugadores el correcto desarrollo de la actividad en cuanto al cumplimiento del reglamento o el uso de un tono de voz adecuado, siendo recompensados por su labor y sirviendo de ayuda para controlar el aula durante el juego.

<u>Evaluación y calificación</u>. Evaluar y calificar la actividad no es un problema, pero sí se puede discutir sobre la pertinencia de la calificación en el trimestre. Es una actividad de final de curso para ponerla en práctica en el tercer trimestre, pero los contenidos que usa no tienen por qué ser del último trimestre. Una posible solución es proponer la actividad como una oportunidad para mejorar la calificación del trimestre y no como parte de la misma.

<u>Número y redundancia de tarjetas</u>. En un tablero participan 8 personas, que deben leer las tarjetas y resolver los ejercicios asociados a ellas en el mismo momento; por tanto, sería conveniente contar con 4 tarjetas de cada contenido (una por pareja). Dado que son 10 tarjetas distintas, se necesitarían 40 tarjetas para cada tablero, y como se necesitarían varios tableros, el número de tarjetas necesarias es bastante elevado. Se pueden imprimir las copias necesarias, o como alternativa, se podrían emplear recursos tecnológicos como ordenadores o tabletas para mostrar las tarjetas y otros materiales del juego.

Finalmente, la propuesta de innovación planteada tiene posibilidades de mejora. A continuación, propongo algunas líneas de trabajo futuro que podrían completarla y mejorarla:

- Desarrollar una versión digital del juego aprovechando los recursos TIC del centro, si es que dispone de ellos. Se podrían utilizar ordenadores con conexión a Internet y algún software, como por ejemplo *Vassal*, que permite crear y jugar a juegos de tablero en línea; *Gambas*, que permite crear videojuegos; o uno más asequible como *Genially*, entre otros.

- Dotar al juego de un reglamento que haga posible la existencia de más estrategias y de mayor profundidad.
- Incorporar al juego mujeres matemáticas, fomentando los valores de igualdad de género entre hombres y mujeres.

En definitiva, tras revisar las ventajas y los inconvenientes de la propuesta, y siendo consciente de que existe margen de mejora, considero que las ventajas expuestas son más influyentes que los inconvenientes y pienso que sería interesante experimentar la actividad en el aula para comprobar sus efectos en el alumnado.

7. CONCLUSIONES

Durante el Máster, dos de los temas que más me han llamado la atención han sido el empleo de la Historia de las Matemáticas y la utilización de juegos educativos como recursos en las clases de Matemáticas. Este gusto personal por estos dos temas concretos ha sido una de las razones para desarrollar este TFM que combina ambos recursos en una actividad para llevar al aula.

Desde el principio, al empezar a pensar en el tema del TFM, tuve claro que quería elaborar una propuesta que fuera motivadora para el alumnado y al mismo tiempo rica culturalmente, lo que, tras un tiempo de reflexión, me pareció que encajaba perfectamente con la combinación de juegos e historia. Por un lado, el juego aporta esa parte de motivación necesaria para que haya aprendizaje y por otro lado, la historia proporciona la parte cultural.

En lo siguiente, se analiza el grado de cumplimiento de los objetivos propuestos en el trabajo, la aportación de las asignaturas del Máster al TFM y una reflexión personal sobre su elaboración.

7.1. Análisis de los objetivos del TFM

En líneas generales, considero que los objetivos propuestos inicialmente en este TFM se han cumplido satisfactoriamente, aunque sería necesario poner en práctica la propuesta para comprobarlo en el aula.

En mi opinión, esta propuesta consigue cumplir con el objetivo de mejorar la contextualización histórica de la asignatura porque los estudiantes pueden situar las matemáticas que se explican en el aula dentro del transcurso de la historia, algo que no suele hacerse en las clases de Matemáticas. La actividad elaborada en este trabajo hace que el alumnado recorra las matemáticas a través de su historia, proporcionándole una visión más completa y contextualizada de la asignatura.

La incorporación de la Historia de las Matemáticas a través del juego tenía como objetivo aumentar la motivación de los estudiantes. Pienso que este propósito del trabajo se ha conseguido porque rasgos como la competitividad y el trabajo en equipo, presentes en el juego elaborado, pueden incrementar la motivación de los estudiantes en la actividad. Además, creo que la perspectiva histórica también puede despertar mayor interés por la asignatura.

La integración de la Historia de las Matemáticas en base al currículo se ha cumplido rigurosamente al relacionar cada civilización o personaje histórico con un contenido matemático del currículo de la asignatura. La incorporación de la metodología basada en el juego también se ha logrado, al admitir el juego que se ha ideado diversas estrategias para ganar puntos y vencer. Como consecuencia de lo anterior, la combinación de la Historia de las Matemáticas y el juego es obvio que se ha conseguido, pero encontrar el equilibrio entre el carácter formativo de la actividad y el carácter lúdico del juego ha sido complicado.

En cuanto a la relación con otras asignaturas, opino que la actividad logra una buena conexión entre las asignaturas de Matemáticas e Historia. También se ha intentado establecer una relación entre las Matemáticas y la Física y la Filosofía, pero esto se ha conseguido en menor medida debido a que se ha priorizado la Historia por encima de estas dos últimas disciplinas porque los conocimientos que se tienen en 2º de ESO sobre ellas son todavía muy elementales o inexistentes.

La actividad que se ha diseñado da a conocer civilizaciones y personas que realizaron avances importantes en el campo de las matemáticas, poniéndoles nombre y mostrando aspectos de su vida y de su época. Con esto se logra acercar la asignatura a los estudiantes humanizándola, lo que no se consigue si nos limitamos puramente a la parte técnica de la disciplina.

Finalmente, se han elegido contenidos que están relacionados con culturas muy diversas, como por ejemplo el Antiguo Egipto, la Antigua Grecia o el mundo árabe. El hecho de que estas culturas ya utilizaran en su tiempo matemáticas que seguimos usando actualmente pone de manifiesto su nivel intelectual y contribuye a que los estudiantes aprecien su valor y su utilidad, cumpliendo así con el último objetivo marcado.

7.2. Aportación de las asignaturas del Máster al TFM

Todas las asignaturas cursadas en el Máster, en mayor o menor medida, han sido de utilidad en la elaboración de este TFM. A continuación, comento brevemente lo que me ha aportado cada asignatura y cómo ha contribuido en la realización de este trabajo.

Aprendizaje y desarrollo de la personalidad. Antes de cursar esta asignatura, no tenía prácticamente ningún conocimiento sobre Psicología. Ahora, conozco aspectos básicos sobre el desarrollo del aprendizaje humano, los cambios biopsicosociales en la adolescencia o la personalidad y la conducta de los adolescentes, entre otros temas. Además, considero que este conocimiento es fundamental en la profesión docente para entender el comportamiento de los estudiantes. Más en concreto, los contenidos de esta asignatura empleados en la realización de este trabajo han sido la motivación del alumnado, las teorías y los modelos de aprendizaje propuestos por los psicólogos más influyentes y, en particular, las teorías psicológicas sobre el juego.

Procesos y contextos educativos. Esta asignatura me ha proporcionado conocimientos sobre la organización de los centros de Educación Secundaria y sobre Didáctica en general. Fue una de las materias que me resultó más útil en el período de prácticas y también ha tenido su aportación en este TFM. Dos de los temas principales de esta asignatura me han sido muy provechosos en la elaboración de este trabajo: las metodologías activas y la evaluación tanto del alumnado como del profesorado. Además, los trabajos realizados durante el curso sobre el Aprendizaje Basado en Juegos y la Gamificación me han servido de gran ayuda, así como los apuntes sobre la evaluación, indagando en aspectos como los instrumentos de evaluación, la autoevaluación, la coevaluación y la metaevaluación. El tema de la motivación del alumnado también se trabajó de forma superficial en esta asignatura.

Sociedad, familia y educación. Desde mi punto de vista, uno de los objetivos de esta asignatura ha sido sensibilizarnos con temas de interés social como la atención a la diversidad o el nivel sociocultural y económico del alumnado. Esto ha influido en mi decisión de realizar un TFM con materiales tradicionales que no precisan de grandes recursos tecnológicos, de manera que se puede poner en práctica en casi cualquier centro independientemente de sus recursos. Por otro lado, se trabajó mucho con los informes PISA, que me han servido en este trabajo para consultar datos sobre el rendimiento académico del alumnado.

Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas. Esta asignatura me ha aportado conocimientos sobre la Didáctica de las Matemáticas. En particular, uno de los focos de la asignatura ha sido conocer el marco legal de la educación y el currículo de Matemáticas, algo que evidentemente he necesitado para elaborar la propuesta de innovación educativa del TFM. Saber cómo hacer la evaluación de la asignatura, por ejemplo mediante instrumentos como las rúbricas, o la utilización de juegos en el aula, han sido otros temas tratados que me han servido de apoyo en la realización de este trabajo.

Complementos para la formación disciplinar. Esta asignatura ha aumentado mi interés por conocer aspectos históricos de las matemáticas e incluirlos en las clases de Educación Secundaria. Además, me ha proporcionado conocimientos de Historia de las Matemáticas relacionados con el temario del currículo de Educación Secundaria que he incluido en este trabajo, como por ejemplo la fórmula egipcia para el cálculo del volumen de una pirámide o el algoritmo babilónico para el cálculo de la raíz cuadrada. También se estudió la organización del sistema educativo español, algo que yo no tenía nada claro al principio del Máster.

Innovación docente e iniciación a la investigación educativa. La idea de plantear un TFM en el que se combinara la Historia de las Matemáticas y el Aprendizaje Basado en Juegos surgió fundamentalmente de esta asignatura. En ella, se ha visto cómo utilizar la Historia de las Matemáticas en el aula de manera innovadora a través de técnicas de aprendizaje cooperativo. Esto me llevó a pensar en la posibilidad de usar la Historia de las Matemáticas mediante juegos. Además, esta asignatura también ha sido útil al darme a conocer una buena cantidad de sitios web sobre innovación educativa en Matemáticas que he consultado habitualmente en estos últimos meses para hacer este trabajo.

7.3. Reflexión personal sobre la elaboración del TFM

En el plano personal, la elaboración de este TFM me ha proporcionado un conocimiento más profundo del currículo, ya que he tenido que revisar con detalle los contenidos de todos los cursos de ESO y Bachillerato para elegir aquel que, en mi opinión, mejor se adapta para incluir la Historia de las Matemáticas en el juego de la forma que quería: haciendo un recorrido histórico por las matemáticas desde la Antigüedad hasta la Edad Moderna.

Por otro lado, la búsqueda de bibliografía me ha llevado a descubrir o conocer mejor distintas publicaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas que me pueden ser de utilidad en el futuro. Esta búsqueda bibliográfica también me ha dado a conocer nuevos motores de búsqueda especializados en trabajos científicos, así como gestores de referencias, que me facilitarán la búsqueda de información en Internet y la realización de futuros trabajos.

Por último, tomando en consideración lo establecido en la guía docente del TFM, pienso que con la elaboración de este trabajo he mejorado y consolidado, principalmente, las siguientes competencias:

- Concretar y transformar el currículo de Matemáticas (de 2º de ESO) en una actividad de aula para repasar y consolidar conocimientos.
- Aplicar en el aula la metodología innovadora denominada Aprendizaje Basado en Juegos de forma cooperativa.
- Seleccionar información y materiales educativos de distintos medios como artículos, libros, periódicos, Internet, etcétera.
- Diseñar actividades de aula adaptadas al nivel del curso académico correspondiente, confeccionando su planificación y su evaluación.
- Elaborar materiales educativos para la clase de Matemáticas.
- Redactar trabajos formales comunicando conocimientos, conclusiones y argumentos que justifican su realización.

Como conclusión, las asignaturas cursadas en el Máster de Profesorado me han proporcionado conocimientos básicos y esenciales sobre la docencia para seguir profundizando en mi futuro profesional como profesor. Concretamente, considero que propuestas de innovación educativa como la recogida en este TFM son necesarias para intentar mejorar la educación actual y adaptarla a los continuos cambios que se producen en nuestra sociedad, preparando a los estudiantes lo mejor posible para incorporarse a ella en un futuro próximo.

8. REFERENCIAS

Armstrong, T. (2009). *Las inteligencias múltiples en el aula: guía práctica para educadores*. Barcelona, España: Paidós Ibérica.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza.

Caillois, R. (1958). *Teoría de los juegos*. Barcelona, España: Seix-Barral.

Chamoso, J. M., Durán, J., García, J. F., Martín, J. y Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *Suma*, 47, 47-58.

Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Consejería de Educación, Cultura y Turismo. (2015). Decreto 19/2015, de 12 de junio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Recuperado de http://ias1.larioja.org/boletin/Bor_Boletin_visor_Servlet?referencia=2386883-1-PDF-493946.

De Guzmán, M. (1989). Juegos y matemáticas. *Suma*, 4, 61-64.

De las Nieves, E. (2002). Una propuesta de evaluación: matematizando con historietas… *Números*, 52, 41-50.

Dehesa, N. (2018). Las Matemáticas puestas en Juego. *Épsilon*, 99, 43-54.

Domínguez, M., Martín, A. M., Paralera, C., Romero, E. y Tenorio, A. F. (2010). Una nueva visión del trabajo en grupo: WebQuest. *Suma*, 64, 45-51.

Educación 3.0. (2019). 50 juegos de mesa educativos que deberían estar en todas las aulas (y casas). Recuperado de https://www.educaciontrespuntocero.com/recursos/juegos-mesa-educativos-clase-aula/37168.html.

Escudero, M. (1997). Fermat y Arquímedes en la clase de integrales. *Suma*, 24, 77-79.

Español, L. (2016). Sobre historia de las matemáticas. Escrito no publicado, Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño, España.

Falcón, O. J., Falcón, R. M., Núñez, J. y Tenorio, A. F. (2009). Las WebQuest como herramienta de apoyo para el profesor de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. *La Gaceta de la RSME*, 12 (2), 347-367.

Falcón, O. J., Falcón, R. M., Núñez, J. y Tenorio, A. F. (2010). Análisis de algunas WebQuest dedicadas a la Historia de las Matemáticas. *Números*, 73, 89-101.

Fernández, J. A. y Barbarán, J. J. (2015). Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática. Madrid, España: La Muralla.

Ferrero, L. (1991). *El juego y la matemática*. Madrid, España: La Muralla.

Fonseca, E. (2018). Factores intrapersonales. Manuscrito no publicado, Departamento de Ciencias de la Educación, Universidad de La Rioja, Logroño, España.

Gairín, J. M. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educar*, 17, 105-118.

Gardner, M. (1980). *Carnaval matemático*. Madrid, España: Alianza.

Giménez, J. (1986). Una aproximación didáctica a las fracciones egipcias. *Números*, 14, 57-62.

González, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, 45, 17-28.

Gutiérrez, S. (2010). La Historia de las Matemáticas como Recurso Didáctico. *La Gaceta de la RSME*, 13 (2), 337-352.

Hans, J. A., Muñoz, J. y Fernández, A. (2005). Stomachion. El cuadrado de Arquímedes. *Suma*, 50, 79-84.

Hernández, L. M. (2012). Sucesiones y la dimensión fractal. Revista digital Matemática, Educación e Internet, 12.

Hernández, M. I. (2018). El Ministerio de Robin Hood: una experiencia de gamificación. *Números*, 98, 153-162.

Huizinga, J. (1972). *Homo ludens*. Madrid, España: Alianza.

Instituto de Educación Secundaria La Laboral. (2019). Escape Room 'Bletchley Park': una actividad interdisciplinar incluida en el Plan Lector. Recuperado de http://ieslalaboral.larioja.edu.es/escape-room-bletchley-park-una-actividad-interdisciplinar-incluida-en-el-plan-lector/.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa. (2013). *Pisa 2012. Informe español*. Madrid, España, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del profesorado. (2017). La taxonomía de Bloom y los procesos de la competencia financiera. Recuperado de http://formacion.intef.es/pluginfile.php/46539/mod_imscp/content/4/la_taxonoma_de_bloom_y_los_procesos_de_la_competencia_financiera.html.

Jiménez, J. M. y Jiménez, R. S. (2014). Matemáticos y científicos andaluces. *Épsilon*, 31 (1), 86, 61-75.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Madrid, España: Alianza.

Lupiáñez, J. L. (2002). Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática. *Suma*, 40, 59-63.

Macho, M. (2017). El juego de cartas 'Top Female Scientists'. Recuperado de https://mujeresconciencia.com/2017/09/01/el-juego-de-cartas-top-female-scientists/.

Martín, C. y Navarro, J. I. (2011). *Psicología para el profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato*. Madrid, España: Pirámide.

Mateo, M. E. (2014). *El juego infantil y su metodología*. España: Macmillan.

Maza, C. (1994). Historia de las Matemáticas y su enseñanza: Un análisis. *Suma*, 17, 17-26.

Plass, J., Homer, B. y Kinzer, C. (2015). Foundations of Game-Based Learning. *Educational Psychologist*, 50 (4), 258-283.

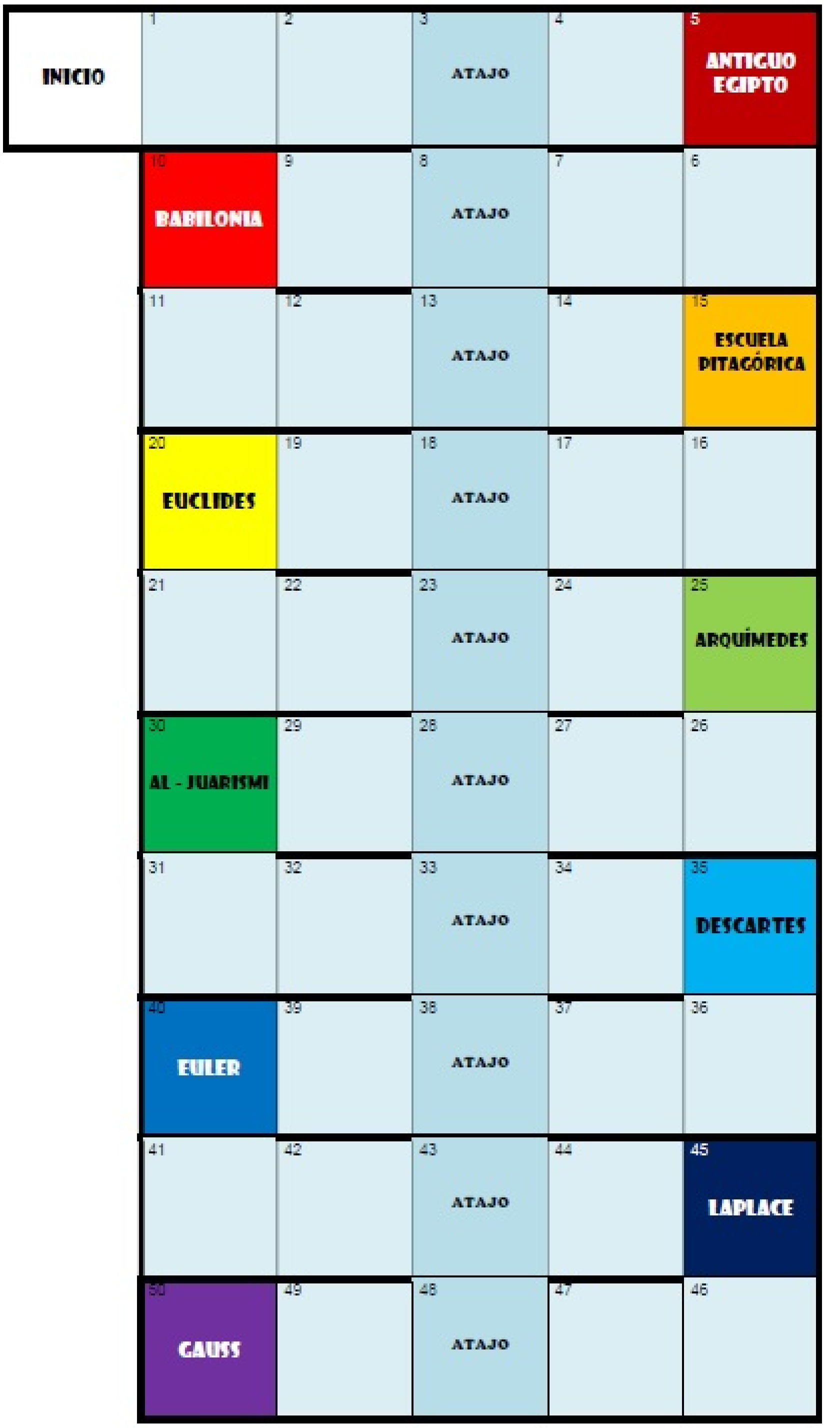
Pólya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México, México: Trillas.

Salinas, J., Adamuz, N. y Jiménez, N. (2011). Una experiencia de aula utilizando la historia de las matemáticas. *Épsilon*, 28 (1), 113-126.

Ueno, C. (2014). Tiempo de (Video) Juegos. *Números*, 86, 161-171.

9. ANEXOS

9.1. Anexo 1. Tablero



9.2. Anexo 2. Tarjetas

Este anexo contiene las tarjetas del juego. Las tarjetas que se presentan a continuación están pensadas para ser imprimidas a doble cara en tamaño cuartilla; es decir, en A5.

TARJETA 1 - ANTIGUO EGIPTO

Hace alrededor de 4000 años, en el Antiguo Egipto, un escriba de identidad desconocida redactó uno de los documentos más importantes de la matemática egipcia: **el papiro de Moscú**.

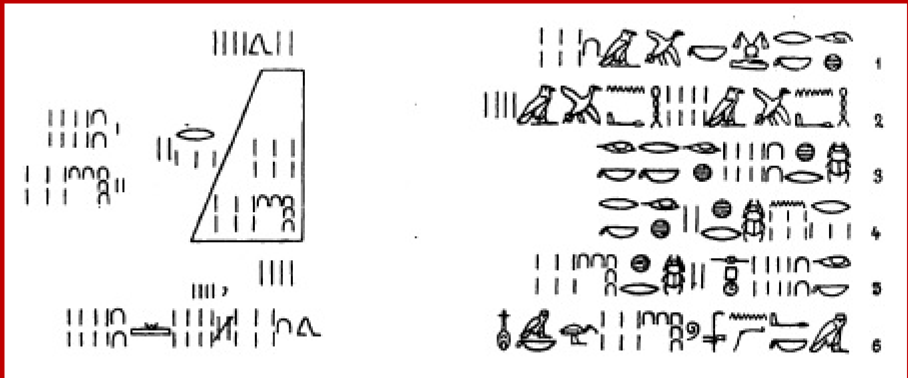
Este papiro, que mide casi 6 metros de largo y 7 centímetros y medio de ancho, fue comprado por un egiptólogo ruso en el año 1893 y actualmente se conserva en el museo Pushkin de Moscú.

En la civilización egipcia, los escribas se encargaban de recaudar impuestos y dirigir ejércitos de trabajadores, entre otras tareas, y eran quienes manejaban las matemáticas.

Esta civilización realizó importantes progresos en arquitectura (pirámides), elaboración de madera, construcción naval, industria textil, metalurgia y escritura.

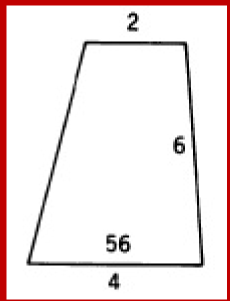
El papiro de Moscú contiene 25 problemas resueltos que están relacionados, en su mayor parte, con problemas de la vida corriente de la época, como medición de tierras e inundaciones, cálculo de impuestos y de capacidades de depósitos, construcción de obras públicas y arquitectura.

El problema 14 es uno de los más interesantes. En él, los egipcios calcularon el volumen de un tronco de pirámide de bases cuadradas conociendo los lados de las bases y la altura. La primera imagen muestra el problema original en escritura jeroglífica y la segunda, la traducción a nuestra escritura.



Aunque nunca la escribieron, los egipcios encontraron y usaron la siguiente fórmula para calcular el volumen del tronco de pirámide de bases cuadradas, donde h es la altura, a es el lado de la base mayor y b es el lado de la base menor.

$$Volumen = \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$



Por tanto, para el tronco de pirámide de la imagen de la izquierda, su volumen es:

$$Volumen = \frac{6(4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2)}{3} = 56$$

Si b=0, la base menor no existe, sería solo un punto (la cúspide) y no se trataría de un tronco de pirámide, sino de una pirámide. Por tanto, si hacemos b=0, podemos calcular el volumen de una pirámide de base cuadrada.

TARJETA 2 - BABILONIA

Las civilizaciones mesopotámicas son aquellas que se asentaron en la zona de Oriente Próximo situada entre los ríos Tigris y Éufrates, actualmente la zona entre Irak y Siria. Entre ellas, destaca la civilización babilónica, cuyo esplendor cultural abarca desde el año 2000 a.C. hasta el 600 a.C., cuando Babilonia, la capital y el centro cultural del imperio babilónico, fue conquistada por el imperio persa.

Las matemáticas de los babilónicos son de un nivel superior a las de los egipcios y, al igual que éstas, también estaban dedicadas a aspectos prácticos de la vida real, como la medición de campos, la construcción de obras hidráulicas y los cálculos relacionados con las prácticas comerciales.

Los babilónicos fabricaron unas tablillas de arcilla en las que grabaron sus avances matemáticos. La tablilla Plimpton 322, que se muestra en esta imagen, contiene grabados, en escritura cuneiforme, una colección de números que cumplen lo que hoy conocemos como el teorema de Pitágoras.

Un resultado relevante encontrado en estas tablillas es el **método babilónico** para calcular de manera aproximada la **raíz cuadrada** de un número. A continuación, calculamos aproximadamente $\sqrt{2}$ como lo hacían los babilónicos.

Llamamos al radicando N=2 y tomamos para iniciar $a_1 = 1$ como primera aproximación de $\sqrt{2}$. Entonces, se calcula el valor b_1 dividiendo N entre a_1:

$$b_1 = \frac{N}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$$

Ahora se calcula el valor a_2 sumando los valores a_1 y b_1 anteriores y dividiéndolos entre 2:

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Este valor a_2 nos proporciona una segunda aproximación de $\sqrt{2}$ mejor que a_1. Decimos que hemos hecho una iteración. Repetimos el proceso para obtener a_3 y así mejorar la aproximación anterior. Calculamos:

$$b_2 = \frac{N}{a_2} = \frac{2}{1{,}5} \sim 1{,}33, \qquad a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} \sim \frac{1{,}5 + 1{,}33}{2} = 1{,}415$$

Después de esta segunda iteración, tenemos $a_3 = 1{,}415$, que es una aproximación mejor de $\sqrt{2}$ que a_2. Aquí se han efectuado 2 iteraciones del método, pero podemos seguir repitiendo este proceso infinitamente para obtener cada vez mejores aproximaciones de las raíces cuadradas.

TARJETA 3 – ESCUELA PITAGÓRICA

Pitágoras fue un matemático de la Antigua Grecia cuyo nacimiento y muerte se sitúan alrededor de los años 569 a.C. y 475 a.C., respectivamente.

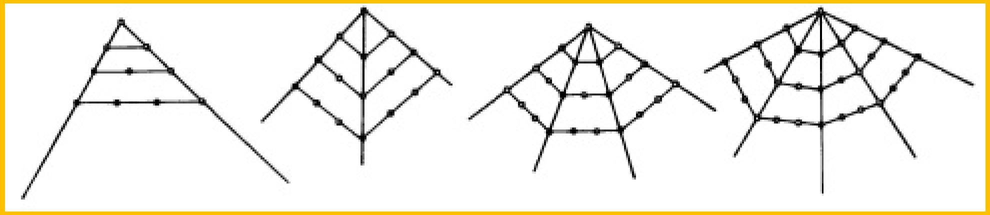
Viajó a Egipto y Babilonia, donde aprendió conocimientos de matemáticas, astronomía y religión. Fue contemporáneo de figuras importantes de la religión como Buda o Confucio. En su época, tanto la religión como las matemáticas, tuvieron un gran impulso en su desarrollo.

La vida de Pitágoras está envuelta por la oscuridad y el misterio, debido a que cuando regresó de sus viajes por Egipto y Babilonia fundó una sociedad secreta que hoy conocemos con el nombre de **escuela pitagórica**.

Esta sociedad se regía por unas normas de conducta muy estrictas y se asentaba sobre las matemáticas y la filosofía, que para ellos iban de la mano y eran la base de la vida.

Las matemáticas del Antiguo Egipto y Babilonia se basaban en ejercicios numéricos aplicados a las tareas de la vida cotidiana, sin embargo, la escuela pitagórica estudiaba las matemáticas desde un punto de vista abstracto, estético, místico, filosófico y, en resumen, más alejado de la utilidad práctica de las matemáticas. De hecho, se considera a Pitágoras como el primer matemático puro de la historia.

Los pitagóricos estudiaron los **números poligonales**. Se trata de números naturales que se pueden dibujar en forma de polígonos (triángulos, cuadrados…), como se muestra en la siguiente imagen.



Las tres fórmulas siguientes determinan los números triangulares (1ª fórmula), los números cuadrados (2ª fórmula) y los números pentagonales (3ª fórmula).

$$\frac{n(n+1)}{2}, \qquad n^2, \qquad \frac{n(3n-1)}{2}$$

Por ejemplo, si queremos calcular el tercer número triangular, tomamos n=3 y lo sustituimos en la fórmula de los números triangulares (la primera) obteniendo:

$$\frac{3(3+1)}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

Por tanto, el número 6 es el tercer número triangular. Para comprobar si el número 10 es un número triangular o no lo es, igualamos la fórmula de los números triangulares al valor dado y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 10, \qquad n^2 + n - 20 = 0$$

Al resolver se obtienen dos soluciones: n=4 y n=-5/2. Nos quedamos solo con las soluciones positivas, en este caso n=4. Como n=4 es un número natural, significa que el número dado 10 es el cuarto número triangular. Si no se obtiene ninguna solución natural, significa que el número dado no se corresponde con esa fórmula y, por tanto, no pertenece a ese tipo de números poligonales.

TARJETA 4 - EUCLIDES

En la época de la Antigua Grecia, aproximadamente entre los años 325 a.C. y 265 a.C., vivió uno de los matemáticos más importantes de la historia: Euclides de Alejandría.

En aquel tiempo, tras la muerte del gobernante Alejandro Magno, se produjeron fuertes enfrentamientos entre los ejércitos griegos por el control del imperio, pero alrededor del año 306 a.C., la zona egipcia del imperio ya estaba controlada por un nuevo gobernante: Ptolomeo.

Al poco de iniciar su mandato, Ptolomeo hizo construir en la ciudad de Alejandría la escuela más importante de la época y en ella Euclides trabajó de profesor impartiendo clases.

La vida de Euclides fue muy oscura y se conoce muy poco de ella, ni siquiera su lugar de nacimiento. La mayor parte de lo que se sabe de Euclides es a través de leyendas y anécdotas que lo suelen describir como una persona amable y sabia, especialmente en matemáticas.

Euclides escribió obras sobre diferentes temas, entre ellos, además de las matemáticas, destacan la astronomía o la música. Su obra más destacada se titula los **Elementos**, que está formada por 13 libros que tratan sobre geometría, álgebra y números.

Los Elementos es uno de los textos más importantes de la historia de las matemáticas porque no solo contiene resultados matemáticos, sino que también recoge la forma de organizar, estructurar y proceder de las matemáticas que se mantiene en la actualidad.

El libro número 7 es interesante, ya que en él aparece el famoso **algoritmo de la división de Euclides**, que afirma:

Dividendo = Divisor x Cociente + Resto

Este resultado se puede utilizar para calcular el máximo común divisor de dos números. Supongamos que queremos calcular el máximo común divisor de 32 y 20, entonces se procede del siguiente modo. Primero se realiza la división por caja de 32 entre 20, obteniéndose:

$$32 = 20 \times 1 + 12$$

Ahora se toma el divisor y el resto de la división anterior y se vuelve a dividir, es decir, 20 entre 12, obteniéndose:

$$20 = 12 \times 1 + 8$$

De nuevo, se repite el proceso. Se toma el divisor y el resto de la división anterior y se vuelve a dividir. Se obtiene:

$$12 = 8 \times 1 + 4$$

Repetimos de nuevo el proceso. Ahora es 8 entre 4:

$$8 = 4 \times 2 + 0$$

El proceso se termina cuando se obtiene como resto 0. En ese momento, se sabe que el divisor de la última división (la que tiene resto 0), que en este ejemplo es el número 4, es el máximo común divisor que buscábamos. Por tanto:

M.C.D. (32,20) = 4.

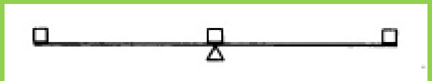
TARJETA 5 – ARQUÍMEDES

Arquímedes fue, probablemente, el matemático más importante de la antigüedad. Nació en torno al año 287 a.C. y murió en el año 212 a.C. a manos de un soldado romano cuando la ciudad de Siracusa (Italia), donde vivía, fue asediada durante dos años y finalmente derrotada por el ejército romano en la lucha que mantenían con los cartagineses por alcanzar el poder.

Se cree que Arquímedes posiblemente estudió durante un tiempo en Alejandría, que era el centro cultural de la época, junto con los discípulos de Euclides.

Además de dedicarse a las actividades intelectuales como las matemáticas o la física, Arquímedes inventó muchas máquinas para la guerra como son las catapultas, las poleas o los aparatos para quemar con fuego a los enemigos desde la distancia. También se interesó por la astronomía. De hecho, construyó varios mecanismos para representar el movimiento de los cuerpos celestes del Sistema Solar como la Luna, La Tierra y el Sol.

Arquímedes hizo importantes descubrimientos tanto en matemáticas como en física. Estudió el equilibrio de las figuras (ley de la palanca, ver imagen) y los cuerpos flotantes, calculó el área y el volumen de la esfera y encontró la aproximación que utilizamos actualmente del número pi ~ 3,14.



En la obra denominada **El Arenario** o **El cálculo de los granos de arena**, Arquímedes introduce una forma que permite escribir números muy grandes y muy pequeños muy cómodamente y que fue evolucionando hasta lo que nosotros conocemos como **notación científica**. Esta necesidad de escribir números muy grandes surgió a partir del estudio de los cuerpos celestes del Sistema Solar y del Universo dado que las distancias que se medían son enormes. Recordemos cómo funciona la notación científica mediante algunos ejemplos.

128530000000	**$1{,}2853 \cdot 10^{11}$**
69400000	**$6{,}94 \cdot 10^{7}$**
0,00000678	**$6{,}78 \cdot 10^{-6}$**
0,000419	**$4{,}19 \cdot 10^{-4}$**

Por ejemplo, si queremos escribir el número 69400000 en notación científica solo tenemos que colocar una coma de forma que haya solo una cifra (no nula) del número a su izquierda (la parte entera del número) y multiplicar por 10 elevado al número de cifras que quedan a la derecha de la coma (la parte decimal del número). Si el número dado tuviera parte entera igual a cero (como el tercer y el cuarto ejemplo de la tabla), el exponente sería negativo.

En sentido inverso, dado el número $6{,}94 \cdot 10^{7}$, para escribirlo en la forma tradicional tenemos que desplazar la coma hacia la derecha tantos lugares o cifras como indica el exponente (en este caso 7) y si no hay tantas cifras, se añaden los ceros necesarios. Si el exponente fuera negativo (como el tercer y el cuarto ejemplo de la tabla), la coma se desplazaría hacia la izquierda.

TARJETA 6 - AL - JUARISMI

Al – Juarismi fue un matemático árabe de la Edad Media que nació y murió, aproximadamente, en los años 780 y 850, respectivamente.

Por aquel entonces, la ciudad de Alejandría dejó de ser el centro mundial de las matemáticas y pasó a serlo la ciudad de Bagdad (Irak), como consecuencia de la expansión de la religión islámica y del mundo árabe, cuyo líder militar y religioso era el profeta Mahoma.

Precisamente en Bagdad, se fundó la **Casa de la Sabiduría**, una especie de universidad donde trabajó el matemático Al – Juarismi, quien escribió más de media docena de obras sobre astronomía y matemáticas.

Sus obras sobre astronomía estaban muy influenciadas por los textos que provenían de la cultura de la India. En particular, escribió una obra sobre Aritmética en la que estudió con detalle el sistema de numeración que usamos en la actualidad para escribir los números, sin embargo, este sistema no es original de Al – Juarismi ni de la cultura árabe, sino que es originario de la India.

Con seguridad, la obra más importante de Al – Juarismi es el texto **Al-jabr**. Esta obra está dedicada al álgebra y en ella se estudia la resolución de ecuaciones de primer grado (que ya se dominaban con anterioridad) y **ecuaciones de segundo grado**. La resolución se basaba en transformar las ecuaciones de segundo grado dadas en otras más sencillas de resolver, pero con las mismas soluciones.

Además, la fórmula utilizada por Al – Juarismi para resolver las ecuaciones de segundo grado es la que utilizamos en la actualidad. Por esta obra, Al – Juarismi es considerado como el padre del álgebra.

Un dato interesante es el origen de la palabra **álgebra**. Esta palabra proviene del nombre Al – Juarismi después de las traducciones realizadas a diferentes lenguas.

Recordemos la conocida fórmula para resolver una ecuación de segundo grado. Se quiere resolver la siguiente ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Entonces, debemos emplear la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por ejemplo, dada la siguiente ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

aplicando la fórmula anterior, su solución es:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

por tanto, las soluciones que se obtienen son: $x = 3,\ x = 1.$

TARJETA 7 – DESCARTES

Uno de los matemáticos más importantes del siglo XVII fue Descartes, quien nació en Francia en el año 1596 y murió en Suecia en el año 1650.

Descartes nació en una familia con buenas posibilidades económicas, lo que le permitió recibir una educación sólida desde niño. Estudió la carrera de derecho en la universidad para agradar a su padre, consiguiendo el título de abogado en el año 1616, sin embargo, pronto abandonó el derecho para dedicarse al estudio de las matemáticas.

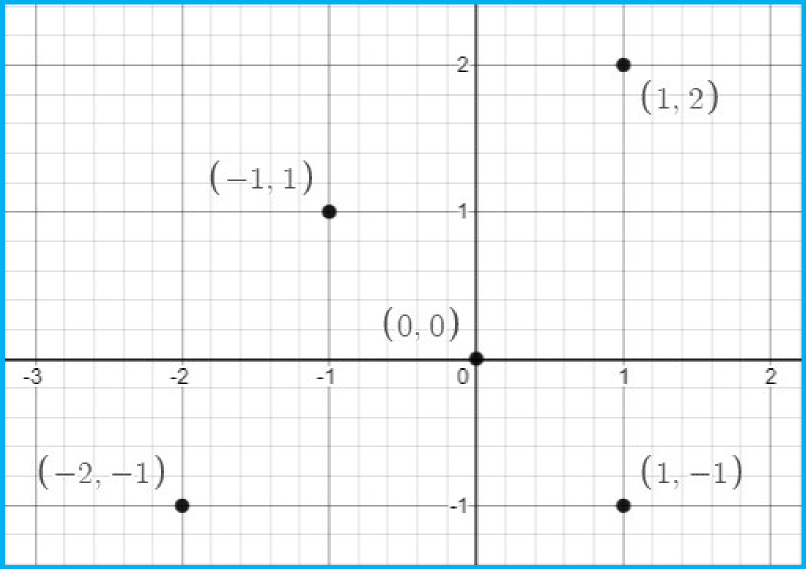
Viajó durante varios años por diversos países de Europa, como Francia, Holanda, Hungría o Alemania, entre otros. En estos viajes, conoció a varios matemáticos del momento y también participó en campañas militares como ingeniero.

En su época, todavía no existía una organización de las matemáticas a nivel profesional, sin embargo se empezaron a crear algunos grupos de matemáticos y científicos con una cierta organización que trabajaban juntos y colaboraban.

Después de un tiempo, se estableció en París y su casa se convirtió en un lugar de encuentro para continuas reuniones de sabios en las que se hablaba de matemáticas y filosofía, pero terminó abandonando París en busca de una vida más tranquila asentándose en Holanda.

En su momento, se le consideró el padre de la filosofía moderna porque basó todo su pensamiento y, también sus matemáticas, en dudar continuamente de todo cuanto sabía para así alcanzar la verdad.

La contribución matemática más importante de Descartes es la creación de la **Geometría Cartesiana**, en la que se utilizan las **coordenadas cartesianas**. Descartes creó estas coordenadas en base a su pensamiento filosófico, en el que todo debía girar en torno a un punto de referencia. Siguiendo esta idea, se le ocurrió llamar al origen de coordenadas por (0,0) como dicho punto de referencia y construyó toda una geometría del plano para representar sus puntos alrededor de esta referencia.



TARJETA 8 - EULER

Con toda seguridad, Euler, que nació en Suiza en el año 1707 y murió en Rusia en el año 1783, es uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos.

El padre de Euler trabajaba de religioso y quería que su hijo tomara ese mismo camino en el futuro, sin embargo, Euler pronto se interesó por las matemáticas.

Recibió una educación muy amplia en áreas muy diversas como matemáticas, religión astronomía, medicina, física y lenguas orientales. Debido a su extensa formación, se le ofreció un puesto de trabajo en la Academia de Rusia en la sección de medicina, aunque luego trabajó en la sección de física, para finalmente lograr un puesto de trabajo definitivo como matemático.

A los 26 años Euler era el matemático más importante de la Academia de Rusia. Se casó, tuvo 13 hijos y se dedicó toda su vida a la investigación matemática.

En el año 1735 perdió la vista en un ojo, pero esto no influyó en su trabajo. Publicó durante toda su vida más de 500 libros y artículos y alcanzó fama internacional. Entre sus publicaciones hay textos de un nivel muy avanzado, pero también se dedicó a escribir libros de matemáticas elementales para las escuelas de Rusia.

Durante un breve período de tiempo trabajó en la Academia de Berlín, en Alemania. A su regreso a Rusia, en el año 1766, Euler perdió la visión en su otro ojo y terminó por padecer una ceguera total durante los últimos 17 años de su vida. A pesar de ello, siguió vinculado a la investigación matemática hasta su muerte repentina en el año 1783.

La producción matemática de Euler es muy extensa y abarca todas las ramas de las matemáticas, por lo que resulta muy difícil destacar algo en concreto de su obra. Un resultado bastante conocido es lo que denominamos como **característica de Euler**.

Euler no fue el primer matemático en descubrir este resultado, ya que Descartes lo conocía, pero sí fue el primero en demostrarlo matemáticamente, ampliarlo a casos más complejos y usarlo para demostrar otros resultados, por ejemplo, que sólo existen 5 cuerpos geométricos tal que todas sus caras son polígonos regulares idénticos: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Dado un cuerpo geométrico cualquiera con vértices, aristas y caras, la característica de Euler se define como:

$$\text{Característica de Euler} = V - A + C,$$

donde V es el número de vértices, A es el número de aristas y C es el número de caras.

Por ejemplo, para un prisma de bases cuadradas tenemos que $V = 8$, $A = 12$ y $C = 6$; por tanto, la característica de Euler del prisma cuadrangular es:

$$\text{Característica de Euler} = 8 - 12 + 6 = 2.$$

Tarjeta 9 – Laplace

Laplace fue un matemático que nació y murió en Francia en los años 1749 y 1827, respectivamente. Su época, el siglo XVIII, no fue un tiempo de gran esplendor en el ámbito de las matemáticas si se compara con otros periodos.

Fue un tiempo marcado por la inestabilidad política y por los continuos desórdenes debido al inicio de la Revolución Francesa en el año 1789. Además, Laplace también vivió el comienzo de la Revolución Industrial.

Su padre fue un comerciante que quería que Laplace tomara el camino de la Iglesia como profesión. Su familia disponía de una situación económica acomodada, lo que permitió a Laplace recibir una buena educación.

Muy pronto demostró su capacidad intelectual. A los 16 años, Laplace accedió a la universidad para cursar estudios en religión, que terminó en dos años. Durante ese tiempo descubrió su gran pasión: las matemáticas.

Con 19 años, se fue a París a estudiar matemáticas y pronto fue nombrado profesor de matemáticas en la Escuela Militar de París debido a su talento.

Los contemporáneos de Laplace lo tenían en muy buena consideración profesional, pero su trabajo quedó más a la sombra que el de otros matemáticos de su tiempo debido a que no tomó partido tan activamente como otros científicos en los conflictos de la Revolución.

Llegó a ser nombrado ministro por Napoleón, pero Laplace no tenía cualidades para los cargos políticos.

Escribió obras sobre el movimiento de los cuerpos celestes y otros trabajos, pero sin duda su mejor producción fue en el campo de la **Teoría de la Probabilidad**.

Laplace fue el matemático más influyente en el campo de la probabilidad y escribió tanto para expertos en el tema como para los no expertos, ya que consideraba que cualquiera podía entender la probabilidad porque son “el sentido común expresado con números”.

Uno de sus más famosos resultados es la **Regla de Laplace**. Esta regla afirma que la probabilidad de un cierto suceso aleatorio es:

$$Probabilidad\ del\ suceso = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ suceso}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

Por ejemplo, si lanzamos un dado con 6 caras numeradas del 1 al 6, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número menor que el 4?

El número de casos favorables es 3 porque existen en el dado 3 números menores que el 4: el 1, el 2 y el 3. Por otro lado, el número de casos posibles es 6 porque existen 6 números posibles en el dado. Por tanto, en este caso:

$$Probabilidad = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Tarjeta 10 - Gauss

Gauss fue un matemático que nació y murió en Alemania en los años 1777 y 1855, respectivamente. Fue el mejor matemático de la primera mitad del siglo XIX y para muchos, el mejor matemático de toda la historia.

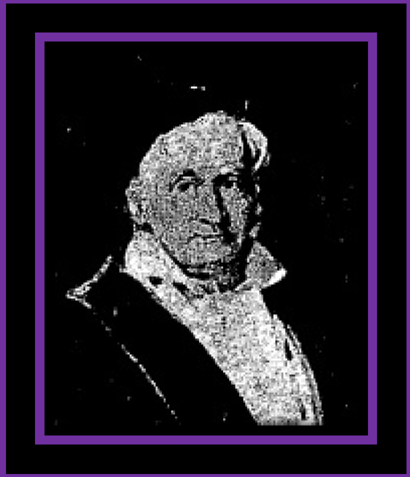
Su padre era obrero e intentó que Gauss no recibiera la educación adecuada, sin embargo, su madre siempre lo animó a estudiar.

De niño asistió a la escuela de la ciudad, donde pronto demostró ser un niño prodigio cuando en una clase descubrió un método para sumar los 100 primeros números naturales sin realizar apenas cálculos numéricos.

Continuó con su formación hasta acceder a la universidad en el año 1795. Se mostró indeciso al elegir sus estudios universitarios, ya que además de las matemáticas, se sentía atraído por la filología (el estudio de textos escritos para estudiar la evolución de la lengua, la literatura y el desarrollo cultural). Finalmente, estudió matemáticas.

Gauss escribió un breve diario de 19 páginas que contiene un total de 146 resultados matemáticos, constituyendo uno de los documentos más bellos e interesantes de la historia de las matemáticas.

A pesar de su gran capacidad para las matemáticas, a Gauss no le agradaba en exceso publicar sus trabajos, al contrario que Euler, posiblemente el único matemático que resiste la comparación con Gauss.



Sus trabajos se centraron fundamentalmente en el álgebra, las funciones y los números primos. Fue en el álgebra, cuando Gauss utilizó un método para resolver sistemas de ecuaciones que seguimos utilizando en la actualidad: el **método de reducción**, también conocido como la **eliminación de Gauss**.

Supongamos que queremos resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formado por:

$$x + 2y = 3, \qquad x - y = 0$$

El método de reducción consiste en multiplicar una de las ecuaciones por un número, de modo que al sumar después las ecuaciones, una de las incógnitas desaparezca en una de las ecuaciones. En el ejemplo, multiplicando la segunda ecuación por -1, y sumándola a la primera se obtiene:

$$3y = 3, \qquad y = \frac{3}{3} = 1$$

Por tanto, sustituyendo en las ecuaciones, tenemos $x = 1$.

9.3. Anexo 3. Hojas de ejercicios y soluciones

TARJETA 1 - ANTIGUO EGIPTO

Ejercicio 1. Calcula la altura de una pirámide cuadrangular cuyo volumen es de 32 unidades y cuya base tiene un área de 16 unidades.

Ejercicio 2. Calcula la altura de una pirámide cuadrangular cuyo volumen es de 75 unidades y cuya base tiene un área de 25 unidades.

Ejercicio 3. Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular cuya altura mide 3 unidades y cuya base tiene un perímetro de 20 unidades.

Ejercicio 4. Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular cuya altura mide 6 unidades y cuya base tiene un perímetro de 16 unidades.

TARJETA 2 - BABILONIA

Ejercicio 1. Calcula 3 iteraciones del método babilónico para calcular $\sqrt{3}$ redondeando con 2 decimales partiendo de $a_1 = 1$.

Ejercicio 2. Calcula 3 iteraciones del método babilónico para calcular $\sqrt{5}$ redondeando con 2 decimales partiendo de $a_1 = 1$.

Ejercicio 3. Calcula 2 iteraciones del método babilónico para calcular $\sqrt{3}$ redondeando con 2 decimales partiendo de $a_1 = 1$.

Ejercicio 4. Calcula 2 iteraciones del método babilónico para calcular $\sqrt{5}$ redondeando con 2 decimales partiendo de $a_1 = 1$.

TARJETA 3 - ESCUELA PITAGÓRICA

Ejercicio 1. Encuentra todos los números que son al mismo tiempo cuadrados y triangulares.

Ejercicio 2. Encuentra todos los números que son al mismo tiempo cuadrados y pentagonales.

Ejercicio 3. Suma el cuarto y el quinto número triangular. ¿Qué tipo de número poligonal se obtiene al sumarlos?

Ejercicio 4. Suma el quinto y el sexto número triangular. ¿Qué tipo de número poligonal se obtiene al sumarlos?

Tarjeta 4 - Euclides

Ejercicio 1. Calcula el máximo común divisor de los números 320 y 213 usando el método de Euclides. ¿Tienen divisores comunes distintos de 1?
Ejercicio 2. Calcula el máximo común divisor de los números 321 y 215 usando el método de Euclides. ¿Tienen divisores comunes distintos de 1?
Ejercicio 3. Calcula el máximo común divisor de los números 35 y 25 usando el método de Euclides.
Ejercicio 4. Calcula el máximo común divisor de los números 45 y 25 usando el método de Euclides.

Tarjeta 5 - Arquímedes

Ejercicio 1. Utiliza la notación científica para multiplicar los siguientes números: 5000000 y 0,00025. Expresa el resultado en notación científica.
Ejercicio 2. Utiliza la notación científica para multiplicar los siguientes números: 480000 y 0,0000012. Expresa el resultado en notación científica.
Ejercicio 3. Escribe el número 0,0003004 en notación científica.
Ejercicio 4. Escribe el número 20340000 en notación científica.

Tarjeta 6 - Al - Juarismi

Ejercicio 1. Resuelve siguiente la ecuación de segundo grado: $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$.
Ejercicio 2. Resuelve siguiente la ecuación de segundo grado: $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$.
Ejercicio 3. Resuelve siguiente la ecuación de segundo grado: $x^2 - 3x + 2 = 0$.
Ejercicio 4. Resuelve siguiente la ecuación de segundo grado: $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Tarjeta 7 - Descartes

Ejercicio 1. Encuentra todos los puntos de coordenadas enteras no nulas que pertenecen a la recta $y = x$ y que están a una distancia del origen menor que el punto (2,2).
Ejercicio 2. Encuentra todos los puntos de coordenadas enteras no nulas que pertenecen a la recta $y = -x$ y que están a una distancia del origen menor que el punto (-2,2).

Ejercicio 3. Encuentra las coordenadas del punto perteneciente a la recta $y = x$ que se encuentra a la misma distancia del origen que el punto (1,1).
Ejercicio 4. Encuentra las coordenadas del punto perteneciente a la recta $y = -x$ que se encuentra a la misma distancia del origen que el punto (-1,1).

TARJETA 8 - EULER

Ejercicio 1. De un cuerpo geométrico sabemos que tiene 8 vértices, que el número de aristas es el doble que el número de caras y que su característica de Euler es 2. ¿De qué cuerpo geométrico se trata?
Ejercicio 2. De un cuerpo geométrico sabemos que tiene 6 aristas, que el número de vértices y el número de caras coinciden y que su característica de Euler es 2. ¿De qué cuerpo geométrico se trata?
Ejercicio 3. Calcula la característica de Euler del tetraedro.
Ejercicio 4. Calcula la característica de Euler del octaedro.

TARJETA 9 - LAPLACE

Ejercicio 1. Calcula la probabilidad de que en el lanzamiento de un dado de seis caras se obtenga un número que sea primo o que tenga a 15 como múltiplo suyo.
Ejercicio 2. Calcula la probabilidad de que en el lanzamiento de un dado de seis caras se obtenga un número que no sea primo y que tenga a 12 como múltiplo suyo.
Ejercicio 3. Calcula la probabilidad de que en el lanzamiento de un dado de seis caras se obtenga un número que tenga a 15 como múltiplo suyo.
Ejercicio 4. Calcula la probabilidad de que en el lanzamiento de un dado de seis caras se obtenga un número que tenga a 12 como múltiplo suyo.

TARJETA 10 - GAUSS

Ejercicio 1. Resuelve el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando el método de reducción de Gauss: $2x + y = 3$, $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 1$.

Ejercicio 2. Resuelve el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando el método de reducción de Gauss: $3x + y = 12$, $\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y = 0$.

Ejercicio 3. Resuelve el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando el método de reducción de Gauss: $2x + y = 4$, $x + y = 3$.

Ejercicio 4. Resuelve el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando el método de reducción de Gauss: $3x + y = 7$, $x - y = 1$.

Tarjeta 1 - Antiguo Egipto

Ejercicio 1. Altura 6.

Ejercicio 2. Altura 9.

Ejercicio 3. Volumen 25.

Ejercicio 4. Volumen 32.

Tarjeta 2 - Babilonia

Ejercicio 1. Es 1,73.

Ejercicio 2. Es 2,24.

Ejercicio 3. Es 1,75.

Ejercicio 4. Es 2,34.

Tarjeta 3 - Escuela Pitagórica

Ejercicio 1. Solamente el 1.

Ejercicio 2. Solamente el 1.

Ejercicio 3. Un número cuadrado.

Ejercicio 4. Un número cuadrado.

Tarjeta 4 - Euclides

Ejercicio 1. M.C.D. es 1. No.

Ejercicio 2. M.C.D. es 1. No.

Ejercicio 3. M.C.D. es 5.

Ejercicio 4. M.C.D. es 5.

Tarjeta 5 - Arquímedes

Ejercicio 1. Número $2 \cdot 10^2$.

Ejercicio 2. Número $4 \cdot 10^{-1}$.

Ejercicio 3. Número $3{,}004 \cdot 10^{-4}$.

Ejercicio 4. Número $2{,}034 \cdot 10^7$.

Tarjeta 6 - Al - Juarismi

Ejercicio 1. $x = \frac{1}{2},\ x = -\frac{3}{4}$.

Ejercicio 2. $x = -\frac{1}{2},\ x = \frac{3}{4}$.

Ejercicio 3. $x = 1,\ x = 2$.

Ejercicio 4. $x = -1,\ x = 4$.

Tarjeta 7 - Descartes

Ejercicio 1. (1,1), (-1,-1).

Ejercicio 2. (-1,1), (1,-1).

Ejercicio 3. (-1,-1).

Ejercicio 4. (1,-1).

TARJETA 8 - EULER

Ejercicio 1. Cubo.

Ejercicio 2. Tetraedro.

Ejercicio 3. Característica 2.

Ejercicio 4. Característica 2.

TARJETA 9 - LAPLACE

Ejercicio 1. Probabilidad 4/6.

Ejercicio 2. Probabilidad 1/2.

Ejercicio 3. Probabilidad 1/2.

Ejercicio 4. Probabilidad 5/6.

TARJETA 10 - GAUSS

Ejercicio 1. $x = 1,\ y = 1$.

Ejercicio 2. $x = 3,\ y = 3$.

Ejercicio 3. $x = 1,\ y = 2$.

Ejercicio 4. $x = 2,\ y = 1$.

9.4. Anexo 4. Hoja de respuestas

Nombre y apellidos: ____

Nombre y apellidos: ____

Antiguo Egipto. Ejercicio número _____.
Babilonia. Ejercicio número _____.
Escuela Pitagórica. Ejercicio número _____.
Euclides. Ejercicio número _____.
Arquímedes. Ejercicio número _____.

Al – Juarismi. Ejercicio número _____.
Descartes. Ejercicio número _____.
Euler. Ejercicio número _____.
Laplace. Ejercicio número _____.
Gauss. Ejercicio número _____.

9.5. Anexo 5. Encuesta de satisfacción

Las siguientes oraciones describen distintos aspectos relacionados con la actividad. Marca la casilla que mejor indica tu nivel de satisfacción siendo 1 = muy en desacuerdo, 2 = en desacuerdo, 3 = de acuerdo y 4 = muy de acuerdo.

Indicadores de satisfacción	1	2	3	4
La actividad ha mejorado o facilitado mi comprensión de los contenidos.				
Los contenidos de la actividad se ajustan al temario del curso.				
La actividad me ha proporcionado una visión más amplia de las Matemáticas.				
La actividad ha contribuido a mejorar el ambiente y las relaciones sociales.				
La actividad ha mejorado mi relación con los compañeros o/y con el profesor.				
La actividad ha fomentado el trabajo en equipo y la cooperación.				
La duración de la actividad ha sido adecuada para terminarla.				
La duración de la actividad ha sido insuficiente para terminarla.				
La actividad fue explicada con claridad por parte del profesor.				
La dinámica de la actividad me ha parecido complicada de entender.				
La evaluación de la actividad me ha parecido adecuada y justa.				
La actividad me ha parecido interesante y motivadora.				
La actividad ha aumentado mi interés hacia la asignatura de Matemáticas.				
Los materiales de la actividad me han parecido adecuados y atractivos.				
La actividad me ha parecido interesante para mi formación y la repetiría.				

Escribe aquí tus sugerencias para mejorar la actividad